平成24年度入学試験問題

数　学

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

（注意事項）

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子，解答紙の中を見てはいけません。
2. 問題冊子は，12ページあります。
   また，中にはさみ込まれている解答紙は，5枚（$\boxed{15}$から$\boxed{19}$まで）です。
3. 「始め」の合図があったら問題冊子のページ数と解答紙の番号を確認し，
   問題冊子のページの落丁・乱丁や解答紙の不足等に気づいた場合は，
   手をあげて監督者に知らせなさい。
4. 解答を始める前に，各解答紙の2箇所に受験番号を記入しなさい。
5. 解答はすべて解答紙のおもてに記入しなさい。
   小問があるときは，小問の番号を明記して解答しなさい。
   解答紙のうらに解答を記入してはいけません。
6. この教科は，250点満点です。なお，経済学部経済工学科については，
   300点満点に換算します。
7. 試験終了後，問題冊子は持ち帰って下さい。

[**1**] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 **15** の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

円 $x^2 + (y-1)^2 = 4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

（下書き用紙）

[2] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{16}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

2 次の正方行列 A, B はそれぞれ

$$A\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\qquad A\begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix},\qquad B\begin{pmatrix}8\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7\\10\end{pmatrix}$$

をみたすものとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，E は 2 次の単位行列を表すものとする。

(1) 行列 A, B, A^2, B^2 を求めよ。

(2) $(AB)^3=E$ であることを示せ。

(3) 行列 A から始めて，B と A を交互に右から掛けて得られる行列

$$A,\quad AB,\quad ABA,\quad ABAB,\quad \cdots\cdots,$$

および行列 B から始めて，A と B を交互に右から掛けて得られる行列

$$B,\quad BA,\quad BAB,\quad BABA,\quad \cdots\cdots$$

を考える。これらの行列の内で，相異なるものをすべて成分を用いて表せ。

（下書き用紙）

[3] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2 + |x+1| + n - 1) = \sqrt{n}\,(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) この方程式が実数解を持つような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2) この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解を持つような a の範囲を求めよ。

（下書き用紙）

[4] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が実数解 α, β を持ち，条件 $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) \neq 0$ をみたしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha| - 1)(|\beta| - 1) > 0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

（下書き用紙）

[5] (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{19}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。

(2) 試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n ($n = 1, 2, 3$) を求めて既約分数で表せ。

(3) 試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。

（下書き用紙）

(下書き用紙)