平成25年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学（理系β）

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ，数学C

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で4題あります。また，解答用紙は4枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に2箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 50) 等式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

を満たす定数 x, y の組 $(x,\ y)$ を $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ とする。ただし, $y_1 < y_2$ とする。このとき, 次の問いに答えなさい。

(1) $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を求めなさい。

(2) 次の等式を満たす定数 α, β の値を求めなさい。

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められるとき,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n}$$

を求めなさい。

〔2〕 (配点 50) $f(x)=\tan x$, $g(x)=\dfrac{4x}{\pi(\pi-2x)}$ とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=g(x)\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ をそれぞれ C_1, C_2 とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，不等式 $f(x) > g(x)$ を証明しなさい。

(2) $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，2 曲線 C_1, C_2 と直線 $x=a$ で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a \to \frac{\pi}{2}-0} S(a)$ を求めなさい。

(3) m を実数とし，2 曲線 C_1, C_2 と直線 $y=mx+1$ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{m \to \infty} T(m)$ を求めなさい。

〔3〕 (配点 50) xy 平面において，方程式 $x+3y=6$ で表される直線を l_0 とし，方程式 $y=x^2-1$ で表される放物線を C_0 とする。l_0 に関して C_0 と対称な放物線を C_1 とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と点 $\mathrm{Q}(c,\ d)$ が l_0 に関して対称であるとき，a，b を用いて c と d を表しなさい。

(2) C_1 上の点のうち，x 座標が最も大きい点の座標を求めなさい。

(3) 原点を通る直線 l_1 に関して C_1 と対称な放物線を C_2 とする。C_2 が放物線 $x=-y^2$ を平行移動して得られる放物線に一致するとき，l_1 の方程式を求めなさい。

〔4〕 (配点 50) 実数 x に対し，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \left[\sqrt{n}\right] \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められるとき，次の問いに答えなさい。

(1) a_1，a_2，a_3，a_4 を求めなさい。

(2) n を自然数とする。

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

とするとき，次の等式を証明しなさい。

$$S_n = \left(n + \frac{5}{6}\right)a_n - \frac{1}{2}a_n{}^2 - \frac{1}{3}a_n{}^3$$