52

数 学 問 題

（平 成 26 年 度）

【注意事項】

1. この問題冊子は「数学」である。
2. 試験時間は120分である。
3. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開いてはいけない。ただし，表紙はあらかじめよく読んでおくこと。
4. 試験開始後すぐに，以下の5および6に記載されていることを確認すること。
5. この問題冊子の印刷は1ページから4ページまである。
6. 解答用紙は問題冊子中央に4枚はさみこんである。
7. 問題冊子に落丁，乱丁，印刷不鮮明な箇所等があった場合および解答用紙が不足している場合は，手をあげて監督者に申し出ること。
8. 試験開始後，4枚ある解答用紙の所定の欄に，受験番号と氏名を記入すること（1枚につき受験番号は2箇所，氏名は1箇所）。
9. 解答は必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。解答用紙の裏面に記入してはいけない。
10. 問題番号に対応した解答用紙に解答していない場合は採点されない場合もあるので注意すること。
11. 問題冊子の中の白紙部分は下書き等に使用してよい。
12. 解答用紙を切り離したり，持ち帰ってはいけない。
13. 試験終了時刻まで退室を認めない。試験中の気分不快やトイレ等，やむを得ない場合には，手をあげて監督者を呼び指示に従うこと。
14. 試験終了後は問題冊子を持ち帰ること。

〔Ⅰ〕以下の問いに答えよ。ただし, 解答のみを解答用紙の所定の欄に記入せよ。

(1) a, b, c を相異なる実数とする。x, y, z に関する連立3元1次方程式

$$\begin{cases} x - ay + a^2 z = a^4 \\ x - by + b^2 z = b^4 \\ x - cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

を解きたい。その解を基本対称式

$$\begin{aligned} A &= a + b + c \\ B &= ab + bc + ca \\ C &= abc \end{aligned}$$

を用いて表せ $\boxed{(1)}$。

(2) 平面上に3点 A(2,3), B(1,2), C(3,1) をとる。このとき, 三角形 ABC の内心を求めよ $\boxed{(2)}$。

(3) 行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} & -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}$$

とおく。このとき, 行列の和

$$A + A^2 + \cdots + A^7 + A^8$$

を, (簡潔な形で) 求めよ $\boxed{(3)}$。

〔II〕 ある開区間 D で与えられた関数 $f(x)$ は, 2 階微分可能で, 第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続で, 更に $f''(x) < 0$ と仮定する。以下の問いに答えよ。

(1) $a_1 < a_2 < a_3$ を満たす D の a_1, a_2, a_3 に対して

$$\frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} > \frac{f(a_3) - f(a_2)}{a_3 - a_2}$$

を示せ。

(2) x_1, x_2 を D の実数とする。$0 \leqq \alpha \leqq 1$ を満たす α に対して

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geqq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$$

を示せ。

(3) x_1, x_2, x_3 を D の実数とする。$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqq 0$ 及び $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ を満たす α_1, α_2, α_3 に対して

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \geqq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

を示せ。

(4) $D = (0, \infty)$ とする。上の議論を用いて, D の x_1, x_2, x_3 に対して不等式

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \geqq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

を示せ。

〔Ⅲ〕 a を正の実数とする。放物線 $y^2 = 4ax$ 上に 2 点 $\mathrm{O}(0,0)$ と $\mathrm{A}(x_1, y_1)$ をとる。$y_1 > 0$ として, 以下の問いに答えよ。

(1) $\alpha > 0$ として, 関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{t^2+\alpha} + \alpha \log\left(t + \sqrt{t^2+\alpha}\right)\right\}$$

とおく。導関数 $F'(t)$ を求めよ。

(2) 点 O から点 A までの曲線の長さ L を x_1 の関数として表せ。ただし, $x = 0$ で値が発散する関数 $g(x)$ については

$$\int_0^a g(x)dx = \lim_{s \to +0} \int_s^a g(x)dx$$

と解釈する（$a > s > 0$)。

〔Ⅳ〕 n を 4 以上の整数とする。1 番から n 番までの番号がふられたボールが 1 つずつある。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 以下のような操作でボールを 1 列に並べる：

1. 1 番のボールを適当な位置におく。
2. 2 番のボールを 1 番のボールの左 または 右に同じ確率でおく。
3. 3 番のボールをすでに並んでいる 2 つのボールの左 または 間 または 右に同じ確率でおく。
4. 以下 n 番まで番号順に, k 番のボールを, すでに並んでいるボールの一番左 または 間 または 一番右に同じ確率でおく, ことを繰り返す。

例えば, 左から 2 番, 1 番, 3 番 のボールが並んでいるとき, 4 番のボールが 2 番と 1 番の間におかれる確率は $\frac{1}{4}$ である。

n 番のボールをおき終えたとき, i 番のボールが左から j 番目に並ぶ確率は $\frac{1}{n}$ であることを証明せよ。ただし, i と j は 1 以上, n 以下の整数とする。

(2) (1) のボールの列を, （左から）番号順に並び替えるため, 以下の操作を考える：

隣り合った 2 つのボールの組で, 左のボールの番号が右のそれより大きなもの（入れ替え可能な組と呼ぶ）が存在するとき, そのようなボールの組を 1 つ選び, 入れ替える。

入れ替え可能な組が複数あった場合に, 入れ替える組をどのように選んだとしても, この操作を繰り返すことにより, すべてのボールの列は, 必ず番号順の列になることを証明せよ。

(3) (2) の操作の回数は, 入れ替える組の選び方とは無関係であることを証明せよ。

(4) (2) においてボールの列を番号順に並べ替えるとき, i 番のボールを, より番号の小さいボールと入れ替える回数の期待値を E_i とする。このとき,

$$\sum_{i=1}^{n} E_i$$

を求めよ。