学　力　検　査　問　題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，
数学A，数学B

平成29年2月25日
自　9時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

6　試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

◇M1(902—1)

空　白

空　白

〔 1 〕 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = \tan\frac{\pi}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

により定める。次の問いに答えよ。

(1) $a_2 = \tan\dfrac{\pi}{6}$, $a_3 = \tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2) 一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ を求めよ。

空　白

〔 2 〕 $a > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1，点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4) 座標平面において，点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

空　白

〔 3 〕 表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし，$0<p<1$ である。このとき，下図のような正三角形の 3 頂点 A，B，C を次の規則で移動する動点 R を考える。

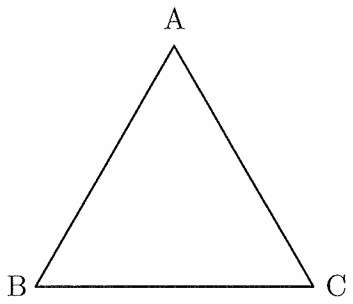
コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し，裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり，全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで，N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,3,\cdots,2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2，P_3 を求めよ。

(2) P_{2m}，P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。



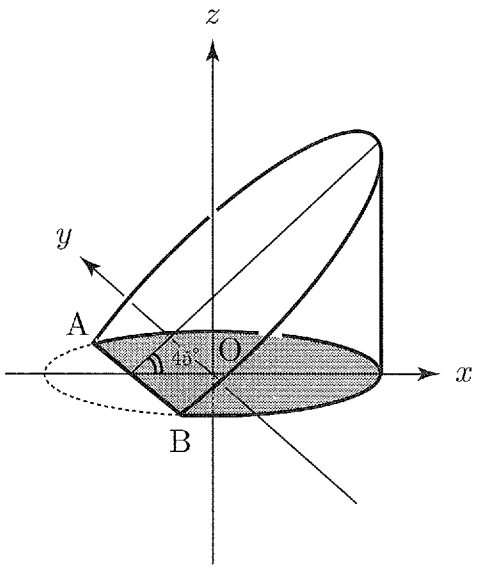
空　白

〔 4 〕 座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の2点 $\mathrm{A}\left(-1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と 45° の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H，平面 T および曲面 K が囲む二つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。

(1) 立体 V と平面 H の共通部分（下図の灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2) 立体 V を平面 $x=t$ $(-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3) 立体 V の体積を求めよ。



空　白

〔 5 〕 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 O(0, 0) および A(50, 14) を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P を一つ求めよ。

(2) m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3) P_m を (2) で定めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4) P_m を (2) で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。

空　白