平成30年度　入学試験問題(前期日程)

数　　学

(数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学A・数学B)

試験時間　120分

理工学部：数学物理学科(数学受験)・情報科学科
医学部：医学科

問題冊子　　**問題…… $\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$**　　**ページ…… 1～2**

解答用紙…… 4枚

下書用紙…… 1枚

配　　点……理工学部は表示のとおり。医学部は表示の0.75倍とする。

注　意　事　項

1. 試験開始の合図まで，この問題冊子を開かないこと。
2. 試験中に，問題冊子・解答用紙の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び下書用紙の不備等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせること。
3. 各解答用紙に受験番号を記入すること。
   なお，解答用紙には，必要事項以外は記入しないこと。
4. 解答は，必ず解答用紙の指定された箇所に記入すること。
5. 解答用紙の各ページは，切り離さないこと。
6. 配付された解答用紙は，持ち帰らないこと。
7. 試験終了後，問題冊子，下書用紙は持ち帰ること。
8. 試験終了後，指示があるまでは退室しないこと。

1 $f(x) = x^2 + x + 105$ とおく。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 52,\ \ a_{n+1} = f(a_n)\ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) x が 7 で割ると 3 余るような整数のとき，$f(x)$ を 7 で割った余りは 5 であることを示せ。

(2) $n > 4$ のとき，a_n は 7 の倍数であることを示せ。

(3) $n > 4$ のとき，a_n を 5 で割ったときの余りを求めよ。

(4) $n > 4$ のとき，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 21 に等しいことを示せ。

2 複素数 z に対して，$\overline{z}$ で z に共役な複素数，$|z|$ で z の絶対値，$\arg z$ で z の偏角を表す。また，i を虚数単位とする。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $z^2 + \overline{z}^2 = 0$ をみたす複素数 z の集合は複素数平面上でどのような図形を描くかを図示せよ。

(2) $\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2} = \alpha^2$ をみたす複素数 α をすべて求めよ。

(3) $(-1-\sqrt{3}\,i)z^2 + (-1+\sqrt{3}\,i)\overline{z}^2 = 0$ をみたす複素数 z の集合は複素数平面上でどのような図形を描くかを図示せよ。

(4) $(-1-\sqrt{3}\,i)z^2 + (-1+\sqrt{3}\,i)\overline{z}^2 = 0$，$|z| = 1$，$\dfrac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ を同時にみたす複素数 z をすべて求めよ。

3 $f(x)$を $f(x)=f(-x)$ かつ $f(0)=0$, $f(1)=1$ をみたす多項式とする。このとき，次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) $f(x)$の導関数 $f'(x)$は$f'(x)=-f'(-x)$をみたすことを導関数と微分係数の定義にしたがって示せ。

(2) $f(x)$は x^2 で割り切れることを示せ。

(3) $\int_a^x f'(t)dt=f(x)-1$ となるような a の値を二つ求めよ。

(4) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1} x^2dx$ をみたす 6 次の多項式 $f(x)$をすべて求めよ。

4 次の問いに答えよ。

(100 点)

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

を求めよ。

(2) 正の整数nに対して，$S_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}(-x^2)^k$ とおく。このとき，任意の実数xに対して，

$$\left|S_n(x)-\frac{1}{1+x^2}\right| \leqq x^{2(n+1)}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2)の $S_n(x)$に対して，

$$\left|\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} S_n(x)dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}\,dx\right| \leqq 3^{-n}$$

を示せ。

(4) (1), (3)の結果を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)3^k}$$

を求めよ。