（前期日程）

平成22年度　　数　学

問題の選択方法

教育学部・農学部 の受験者は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の4問

理学部・工学部 の受験者は $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ の5問

医学部 の受験者は $\boxed{4}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ の5問

を解答すること。

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，18ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。

4　問題紙の余白は下書きに使用してよい。

1 （教育学部・農学部）

次の問いに答えよ。

(1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geqq 0 \end{cases}$$

(2) 鈍角三角形ABCにおいて，BC $= 1$，CA $= \sqrt{3}$，$\angle$A $= 30^\circ$ であるとき，ABの長さを求めよ。

(3) 原点O，および3点A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 1)$がある。$0 < s < 1$ に対して，線分AB，線分CAを $s : (1-s)$ に内分する点を，それぞれP，Qとするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s を用いて表せ。

(4) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

(5) 数列 $1,\ a,\ b,\ c$ はこの順に等差数列であり，数列 $a,\ b,\ 1,\ c$ はこの順に等比数列であるとする。このとき，$c = 1$ であることを示せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

2 （教育学部・農学部）

直線 $y = a(x+2)$ と円 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ は異なる 2 点 P，Q で交わっているとする。また，線分 PQ の中点を R とする。

(1) 定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) R の座標を a を用いて表せ。

(3) 原点 O と点 R の距離を求めよ。

(4) a の値が (1) で求めた範囲を動くとき，点 R の軌跡を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ （教育学部・農学部）

$f(x) = x^2 - 2|x| - 1$ とする。

(1) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ の交点の座標を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = 3x + 5$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

4 (教育学部・農学部・理学部・工学部・医学部)

4の数字が書かれたカードが1枚，3の数字が書かれたカードが1枚，2の数字が書かれたカードが2枚，1の数字が書かれたカードが2枚，0の数字が書かれたカードが4枚ある。これら合計10枚のカードをよくまぜて，左から右に一列に並べる。

(1) 左から4番目までの4枚のカードに書かれた数がすべて0となる確率を求めよ。

(2) 右から1番目のカードに書かれた数の期待値を求めよ。

(3) 左から3番目までの3枚のカードに書かれた3つの数について，次の条件①，②を考える。

① 3つの数がすべて異なる。

② 3つの数の中で，左から1番目のカードに書かれた数 a が最大である。

条件①，②の両方が同時にみたされた場合の得点を a とし，それ以外の場合の得点を0とする。

(i) 得点が4となる確率を求めよ。

(ii) 得点の期待値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ **（理学部・工学部）**

次の問いに答えよ。

(1) 次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 15 < 0 \\ x^2 - 2x \geqq 0 \end{cases}$$

(2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$ と $x \leqq y$ の両方をみたす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

(3) 方程式 $\left(\log_2 \sqrt{x} + \log_2 x^2 + \log_2 \dfrac{1}{x}\right)^2 = 9$ を解け。

(4) 原点O，および3点 A$(1, 0, 0)$，B$(0, 1, 0)$，C$(0, 0, 1)$がある。$0 < s < 1$ に対して，線分 AB，線分 CA を $s : (1 - s)$ に内分する点を，それぞれ P，Q とするとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を s を用いて表せ。

(5) 等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x + a)\cos 2x\, dx = \frac{\pi}{8}$ が成り立つとき，定数 a の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

6 （理学部・工学部・医学部）

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，すべての自然数nについて

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-{b_n}^2}, \quad b_{n+1}=a_{n+1}b_n$$

をみたしているとする。

(1) 初項が$a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$であるとする。

(i) a_2，b_2，a_3，b_3を求めよ。

(ii) a_n，b_nを表すnの式を推定し，それらの推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

(2) 初項が$a_1=\dfrac{1}{2010}$，$b_1=\dfrac{2009}{2010}$であるとする。

(i) $a_{n+1}+b_{n+1}$をa_n，b_nで表せ。

(ii) a_n+b_nを求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

7 **(理学部・工学部・医学部)**

行列$\begin{pmatrix} a & b \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$の表す点の移動を$f$とし，$l$を直線$y = 2x - 1$とする。また，$f$による$l$上の点の像はすべて$l$上にあり，$l$上のある点Pは$f$によってP自身に移されるとする。

(1) a，bの値を求めよ。

(2) Pの座標を求めよ。

(3) 次の条件①，②，③をすべてみたす直線mの方程式を求めよ。

① mはPを通る。

② fによるm上の点の像はすべてm上にある。

③ mはlと異なる。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

8 （理学部・工学部・医学部）

n を自然数とし，$f(x)=x^2e^{-\frac{2}{3}x^3}$ とする。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) 不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)<\frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}}$ を証明せよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

9 （医学部）

nを自然数とし，集合A，Bを

$$A=\{a \mid a\text{は条件}(★)\text{をみたす自然数}\}$$
$$B=\{a \mid a\text{は条件}(☆)\text{をみたす自然数}\}$$

で定める。ただし，条件(★)，(☆)は次で与えられるとする。

(★)　2次方程式$x^2-ax+2^n=0$は異なる2つの実数解α，βをもち，$\alpha-\beta$は整数である。

(☆)　2次方程式$x^2-ax+2^n=0$は異なる2つの整数解α，βをもつ。

(1)　2つの集合A，Bについて，$A=B$が成り立つことを証明せよ。

(2)　(i)　$n=1$，2のそれぞれの場合について，集合Aを，要素を書き並べて表せ。

(ii)　集合Aの要素のうち，最大の数を求めよ。

(iii)　集合Aのすべての要素の和を求めよ。