

## 平成 22 年度 入学者選抜学力検査問題

# 数 学 (理系 $\beta$ )

数学 I, 数学 A  
数学 II, 数学 B  
数学 III, 数学 C

### 注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で 4 題あります。また，解答用紙は 4 枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に 2 箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

[ 1 ] (配点 50) 3 辺が  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 5$  である  $\triangle ABC$  の外心を  $O$ ,  $\angle A$  の 2 等分線と辺  $BC$  との交点を  $D$  とする。  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とするとき, 次の問いに答えなさい。

- (1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を求めなさい。
- (2) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{c}$  を求めなさい。
- (3)  $OB \perp AD$  を示しなさい。

[ 2 ] (配点 50) 次の初項と漸化式で定まる数列  $\{a_n\}$  を考える。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = e^{-a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで、 $e$  は自然対数の底で、 $1 < e < 3$  である。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数  $n$  について  $\frac{1}{3} < a_n < 1$  が成り立つことを示しなさい。
- (2) 方程式  $x = e^{-x}$  はただ 1 つの実数解をもつことと、その解は  $\frac{1}{3}$  と 1 の間にあることを示しなさい。
- (3) 関数  $f(x) = e^{-x}$  に平均値の定理を用いることによって、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{1}{3} \text{ と } 1 \text{ との間} \text{の任意の実数 } x_1, x_2 \text{ について,}$$
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq e^{-\frac{1}{3}} |x_2 - x_1|$$

- (4) 数列  $\{a_n\}$  は、方程式  $x = e^{-x}$  の実数解に収束することを示しなさい。

[ 3 ] (配点 50)  $a, b$  は  $a < b$  を満たす実数とする。放物線  $y = x^2$  上の 2 点  $A(a, a^2), B(b, b^2)$  においてそれぞれ接線を引く。この 2 つの接線の交点を  $P(p, q)$  とする。このとき、次の問いに答えなさい。

- (1)  $p, q$  を  $a, b$  を用いて表しなさい。
- (2) 2 点  $A, B$  が  $\angle APB = \frac{\pi}{4}$  を満たしながらこの放物線上を動くとき、点  $P$  の軌跡の方程式を求めなさい。
- (3) (2) の条件の下で、この放物線と 2 つの接線で囲まれた図形の面積を  $q$  を用いて表しなさい。

[ 4 ] (配点 50) 赤玉, 白玉, 青玉がそれぞれ 2 個以上入った袋がある。袋から同時に玉を  $k$  個取り出し, 色を調べてからもとに戻す試行を  $S(k)$  とする。試行  $S(1)$  を続けて 2 回行うとき, 赤玉が少なくとも 1 回出る確率が  $\frac{5}{9}$ , 異なる色の玉が出る確率が  $\frac{2}{3}$  であるとする。このとき, 次の問いに答えなさい。

- (1) 試行  $S(1)$  を 1 回行うとき, 赤玉の出る確率と白玉の出る確率を求めなさい。
- (2) 試行  $S(2)$  を続けて 2 回行う。1 回目に取り出す玉の色と 2 回目に取り出す玉の色に重複がない確率が  $\frac{1}{6}$  であるとき, 赤玉, 白玉, 青玉それぞれの個数を求めなさい。