1 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x^2 - 3x + 7 - 3|x - 2|$ のグラフをかけ。

(2) 方程式 $\log_5 x - \dfrac{4}{\log_5 x} + \dfrac{\log_5 x^3}{\log_5 x} = 0$ を解け。

(3) $a > 0$ とする。関数 $f(t) = t(a - t^2)$ $(0 < t < \sqrt{a})$ の最大値が 2 であるとき，a の値を求めよ。

(4) 正四面体の各面に 0，1，2，3 の数字が 1 つずつ書かれているさいころがある。このさいころを投げたとき，各面が底面になる確率は等しいものとする。このようなさいころを 2 つ同時に投げ，おのおののさいころの底面に書かれている数の積を X とする。X の期待値を求めよ。

(5) 2 つの曲線 $y = x^2$，$y = -x^2 + 2x + 1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

2 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

次の条件を満たす三角形ABCはどのような三角形か。(1), (2), (3) それぞれの場合について，理由をつけて答えよ。ただし，三角形ABCにおいて，頂点A，B，Cに向い合う辺BC，CA，ABの長さをそれぞれa，b，cで表す。また，∠A，∠B，∠Cの大きさをそれぞれA，B，Cで表す。

(1) $\dfrac{b}{\sin A} = \dfrac{a}{\sin B}$

(2) $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$

(3) $\dfrac{b}{\cos A} = \dfrac{a}{\cos B}$

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

3 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = 1 - |2x - 1|$$

$$g(x) = 1 - \Big|2|2x-1| - 1\Big|$$

と定める。

(1) $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフをかけ。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $y = g(x)$ のグラフをかけ。

(4) 連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq f(x) \\ y \leqq g(x) \\ 0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ （教育学部・農学部・理学部・工学部・医学部）

四面体OABCの辺OB, OC, AC, ABの中点をそれぞれP, Q, R, Sとする。また, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて, $\overrightarrow{AS}$ と $\overrightarrow{AR}$ を表せ。

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{SR}$ を表せ。

(3) 点O, A, B, Cの座標が実数 t を用いて, それぞれ $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(t, 1, 0)$, $(2, t, 1)$ で与えられているとする。

(i) 四角形PQRSが長方形となるような t の値を求めよ。

(ii) 四角形PQRSがひし形となるような t の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

5 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く））

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=x^2-3x+7-3|x-2|$ のグラフをかけ。

(2) $a>0$ とする。関数 $y=(a-x)\sqrt{x}$ $(0<x<a)$ の最大値が2であるとき，a の値を求めよ。

(3) 自然数 n について，等式

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。ただし，$x \neq 1$ とする。

(4) i を虚数単位とする。等式

$$(2+3i)(5a-2i)=\frac{b}{1-i}$$

を満たす実数 a と実数 b の値を求めよ。

(5) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan 4x}\,dx$　　　(ii) $\displaystyle\int x\sqrt{1-5x}\,dx$

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

6 (理学部・工学部(環境建設工学科社会デザインコースを除く)・医学部)

単位行列 E と行列

$$A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$

について，次の問いに答えよ。

(1) $A^2=pE+qA$ となる実数 p，q の値を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，関係式

$$E+A+A^2+\cdots+A^{2n-1}+A^{2n}=x_nE+y_nA$$

をみたす実数 x_n，y_n を，n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。

(4) 実数 x，y をそれぞれ $x=\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$y=\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ で定めるとき

$$xE+yA=(E-A)^{-1}$$

であることを示せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

7 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

自然数 n を定数として，さいころを投げる次の競技を行う。この競技は，**試行 1** と**試行 2** からなる。競技者は，はじめに**試行 1** を行う。

試行 1　さいころを投げ，出た目の数を X とする。X の値に応じて次の手順に従う。

・$X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の場合

X の値を得点として競技を終了する。

・$X=6$ の場合

もし $n=1$ ならば，7 を得点として競技を終了する。

（★）　もし $n \geqq 2$ ならば，**試行 2** に進む。

試行 2　競技者はさいころを投げる。

（★★）　出た目の数を X とする。

X の値に応じて次の手順に従う。

・$X=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の場合

次のように定めた P を得点として競技を終了する。

$$P=\begin{cases} -1 & (X=1) \\ 7 & (X=2,\ 3,\ 4) \\ 13 & (X=5) \end{cases}$$

・$X=6$ の場合

もし競技開始から現時点までにさいころを投げた回数が n に等しいならば，7 を得点として競技を終了する。

そうでないならば，続けてさいころを投げ，（★★）にもどる。

以下の問いに答えよ。

(1) $n=1$ として，**試行 1** のみを行う。得点の期待値を求めよ。

(2) $n=4$ とする。得点の期待値を求めよ。

(3) $n=30$ とする。**試行 1** を行い $X=6$ になった。

このとき，**試行 1** の規則(★)を変更して，競技者は

(a) 得点 7 を得て競技をただちに終了するか

(b) 終了せずに**試行 2** に進むか

どちらか一方を選択できるとする。どちらの選択をする方が得点の期待値が大きいか。

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{8}$ （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

関数

$$f(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x) \qquad (0 < x < 1)$$

について次の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x \to +0} x\log x = 0$ を使ってよい。

(1) $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x \to 1-0} f(x)$ を調べ，そのグラフをかけ。

(2) 定積分 $S(p) = \displaystyle\int_p^{1-p} f(x)\,dx$ を求めよ。ただし，$0 < p < \dfrac{1}{2}$ とする。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{p \to +0} S(p)$ を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{9}$ （医学部）

関数

$$f(x) = \cos x - x\sin x$$
$$g_n(x) = (x + n\pi)\sin x - \cos x \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

について，次の問いに答えよ。ただし，必要があれば，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすすべての x について $\tan x > x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) すべての自然数 n，実数 x に対して $g_n(x) = (-1)^{n+1} f(x + n\pi)$ が成り立つことを示せ。

(2) 自然数 n に対して，方程式 $g_n(x) = 0$ は $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲においてただ１つの解をもつことを示せ。

(3) (2)におけるただ１つの解を x_n とする。x_n は $0 < x_n < \dfrac{1}{n\pi}$ を満たすことを示せ。

(4) $y_n = n\pi + x_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。定積分

$$S_n = \int_{y_n}^{y_{n+1}} |f(x)|\, dx$$

を，n，x_n および x_{n+1} を用いて表せ。

(5) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ を求めよ。

（下 書 き 用 紙）