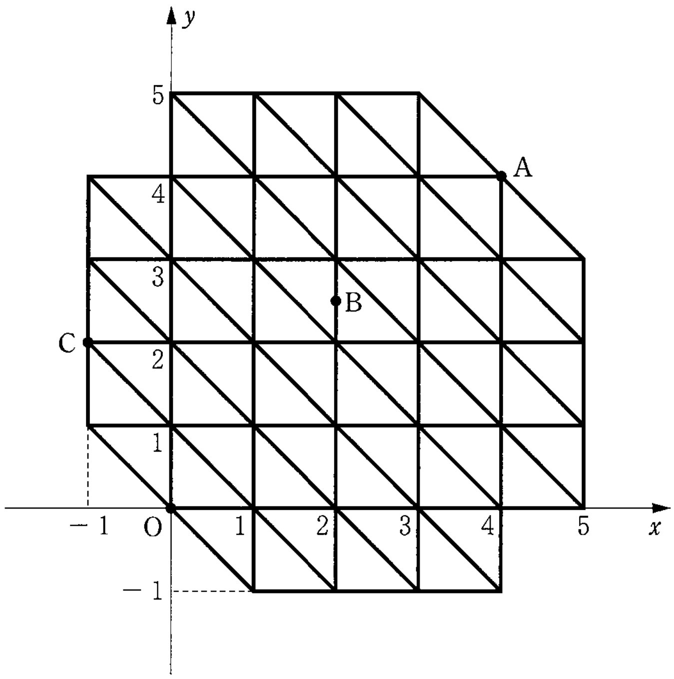
教育学部[数学(イ)]

地域科学部

医学部看護学科

応用生物科学部

1 下の図のように，xy 平面上に，x 軸に平行な道，y 軸に平行な道，直線 $y = -x$ に平行な道があるものとする。これらの道を通って，原点Oから点A$(4,\ 4)$まで行くとき，以下の各場合に道順の総数を求めよ。(配点比率 20 %)



(1) 最短経路で行く場合。

(2) 点B$(2,\ 2.5)$を通らずに，最短経路で行く場合。

(3) 点C$(-1,\ 2)$を通り，道のりが $8 + \sqrt{2}$ になる場合。

(4) 道のりが $8 + \sqrt{2}$ になる場合。

(5) $0 \leqq x \leqq 4$，$0 \leqq y \leqq 4$ の部分だけを通り，道のりが $8 + \sqrt{2}$ になる場合。

2 連立不等式 $y \geqq |3x-2|$, $x-4y+8 \geqq 0$ の表す領域を D とする。以下の問に答えよ。

(配点比率 20 %)

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 (x, y) が領域 D を動くとき，x^2+2x+y^2 の最小値と，それを与える点 (x, y) を求めよ。

$\boxed{3}$ 平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 S と S に内接する正三角形 ABC がある。以下の問に答えよ。(配点比率 20 %)

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) 平面上の任意の点 P に対して，以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \geqq 3$$

また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

(4) 円 S の周上の任意の点 Q に対して，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2+\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2+\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2=\frac{3}{2}$$

となることを示せ。

(5) 円 S の周上の任意の点 Q に対して，

$$\mathrm{AQ}^4+\mathrm{BQ}^4+\mathrm{CQ}^4$$

の値を求めよ。

4 空間内の四面体OABCについて，$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OAB} = 90^\circ$，$\angle \mathrm{BOC} = \alpha$，$\angle \mathrm{COA} = \beta$，$\angle \mathrm{AOB} = \gamma$，$\mathrm{OA} = 1$とする。ただし，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$はすべて鋭角で，$\cos\alpha = \frac{1}{4}$，$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$である。三角形ABCの外接円を$S$とし，その中心をPとする。以下の問に答えよ。(配点比率20％)

(1) 辺BCの長さを求めよ。

(2) $\theta = \angle \mathrm{BAC}$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

(3) 線分OPの長さを求めよ。

(4) 円Sの周上に点Dをとり，線分ADと線分DBの長さをそれぞれ$\mathrm{AD} = x$，$\mathrm{DB} = y$とする。$x + y$の最大値とそれを与えるx，yを求めよ。

5 放物線 $y = x^2 + 4x$ を C とする。C 上の x 座標が p である点における接線を l とする。ただし，p は正の定数とする。以下の問に答えよ。(配点比率 20 ％)

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l と y 軸との交点を通る C の接線を m とする。ただし，m と l は異なるとする。m の方程式を求めよ。

(3) 放物線 C と接線 l および y 軸とで囲まれた部分の面積を S とし，放物線 C と接線 m および y 軸とで囲まれた部分の面積を T とする。$\dfrac{T}{S}$ の値は p によらず一定となることを示せ。