数学（数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学Ａ，
　　数学Ｂ，数学Ｃ）
　１０ページ　問題[５]
　　上から３行目，４行目

補足説明

コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。

学 力 検 査 問 題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成23年2月25日
自　9時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が**5問**あります。総ページは**11ページ**で，問題は偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

◇M7(366—129)

〔1〕 実数 a, b に対して，2 次正方行列 A と列ベクトル B を

$$A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$$

と定め，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

により，座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し点 $\mathrm{P}'(x', y')$ が定まるものとする。次の問いに答えよ。

(1) $a = b = -1$ のとき，点 $\mathrm{P}'(3, 2)$ となる点 $\mathrm{P}(x, y)$ を求めよ。

(2) $A^2 = kE$ (k は実数) を満たすとき，a, k の値を求めよ。

(3) どんな点 P に対しても点 P′ が原点 O に一致しないための a, b の条件を求めよ。

空　白

〔2〕 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2) p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3) $\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。

空　白

〔3〕 次の問いに答えよ。

(1) a, b, c を定数とする。関数 $f(x) = a\cos^2 x + 2b\cos x\sin x + c\sin^2 x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2) 関数

$$g(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x\sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

が最大値をとる x の値を θ とする。$\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3) (2) の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)\,dx$ を求めよ。

空　白

〔4〕 平面上で，線分 AB を 1 : 2 に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$，$\angle\mathrm{APB} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) 点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta < \dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3) PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4) PA = 3，PB = 2 とする。△QAB = 3△POB を満たすとき，△PAB の面積を求めよ。

空　白

〔5〕　△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が，次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，
裏が出たときは動かない。

コインを n 回投げたとき，石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする。次の問いに答えよ。

(1) a_1, b_1, c_1 の値を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n で表せ。また，a_2, b_2, c_2 および a_3, b_3, c_3 の値を求めよ。

(3) a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4) (3) において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。

空　白