

数 学

〔理学部(数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科)・医学部(医学科)・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は4ページである。
3. 学部名と受験番号を、必ず5枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は、所定の解答用紙の解答欄に記入し終わるようにし、裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は、 ～ の5題ある。
7. 解答用紙は、 ～ のそれぞれについて1枚ずつ計5枚ある。
8. は選択問題であるから、解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は、論証および計算の進め方がはっきり分かるように、順序よく的確に表現すること。また、文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) $0 < a < 1$ とする。次の不等式を解け。

$$\log_a(2x-1) + \log_a(x-1) \leq 0$$

(2) $(2x - y + z)^8$ の展開式における $x^2y^3z^3$ の係数を求めよ。

(3) 三角形の3辺の長さ a, b, c の比が $a : b : c = 7 : 6 : 5$ であり、面積が $12\sqrt{6}$ のとき、 a の値を求めよ。

(4) m と n を正の整数とする。 n を m で割ると7余り、 $n + 13$ は m で割り切れるとき、 m の値をすべて求めよ。

2 $0 \leq x \leq 1$ とする。このとき、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt| dt$$

と定義する。次の各問いに答えよ。

(1) t の関数 $g(t) = |t^2 - xt|$ のグラフの概形をかけ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

3 四角形 ABCD に対して次の①と②が成り立つとする。

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \vec{CD} \cdot \vec{DA} \quad \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\vec{DA} \cdot \vec{AB} = \vec{BC} \cdot \vec{CD} \quad \dots\dots\textcircled{2}$$

このとき、四角形 ABCD は向い合う辺の長さが等しくなる(すなわち平行四辺形になる)ことを示せ。

4 $f(x)$ は数直線上の連続関数で、次の条件(i)と(ii)をみたすものとする。

(i) $f(x)$ は周期 1 の周期関数、すなわち、すべての x で $f(x+1) = f(x)$ が成り立つ。

(ii) $\int_0^1 f(x) dx = 0$

次の各問いに答えよ。

- (1) 条件(i)と(ii)をみたす恒等的に 0 でない連続関数 $f(x)$ の例を 1 つ挙げよ。
- (2) $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ とおくと、 $F(x)$ も周期 1 の周期関数であることを示せ。
- (3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\frac{d}{dx} F(nx)$ を f を用いて表せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 xf(nx) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

- 5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に、解答する問題の番号を記入すること。

5—1 次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

次の各問いに答えよ。

- (1) 2×2 行列 X に対して、 $E - X$ が逆行列を持つとき

$$E + X + X^2 + \cdots + X^n = (E - X^{n+1})(E - X)^{-1}$$

が成立することを示せ。ただし、 E は 2×2 の単位行列である。

- (2) A^2 と A^3 を計算せよ。さらに A^{100} と A^{101} を計算せよ。
(3) $E + A + A^2 + \cdots + A^{100}$ を計算せよ。

5—2 曲線 C は極方程式 $r = 2 \cos \theta$ で定義されているとする。このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 曲線 C を直交座標 (x, y) に関する方程式で表し、さらに図示せよ。
(2) 点 $(-1, 0)$ を通る傾き k の直線を考える。この直線が曲線 C と2点で交わるような k の値の範囲を求めよ。
(3) (2)のもとで、2交点の中点の軌跡を求めよ。

5—3 大小2個のさいころを同時に投げる試行を考える。この試行で、大きいさいころの出た目を X 、小さいさいころの出た目を Y とする。 $T = 2X - Y$ とするとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 確率 $P(T = 6)$ 、 $P(T \geq 0)$ を求めよ。
- (2) 分散 $V(X)$ 、平均 $E(T)$ を求めよ。
- (3) $V(aT) = 25$ となる定数 a の値を求めよ。

5—4 次の各問いに答えよ。

- (1) 確率変数 X は 0 以上 3 以下の値をとり、その確率密度関数 $f(x)$ は次で与えられているとする。このとき、定数 k 、平均 $E(X)$ を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{4}x + k & (1 \leq x \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

- (2) Z を標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う確率変数とする。また、任意の $x (x \geq 0)$ に対して、関数 $g(x)$ を $g(x) = P(0 \leq Z \leq x)$ とおく。このとき、次の各問いに答えよ。
 - (a) 確率 $P(a \leq Z \leq b)$ を関数 g で表せ。ただし、 a と b は定数で $a < b$ とする。
 - (b) 母平均 50、母標準偏差 $3\sqrt{10}$ の母集団から大きさ 10 の標本を抽出するとき、標本平均が 41.0 以上 48.5 以下になる確率を関数 g で表せ。
 - (c) $0 < p < 1$ とし、 l_p は $g(l_p) = \frac{p}{2}$ をみたすものとする。母分散 25 の母集団から大きさ 20 の標本を抽出したところ、標本平均が 45 であった。母平均 m に対する信頼度 $100p\%$ の信頼区間の区間幅を l_p を用いて表せ。