

1 自然数 n について、 a_n を \sqrt{n} 以下の整数のうち最大のものとするとき、次の各問に答えよ。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。

(2) 自然数 m について、 $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2}$ を、 m を用いて表せ。

2 100点と書かれたカード，50点と書かれたカード，10点と書かれたカードがそれぞれ2枚ずつ入った1つの袋の中から1枚ずつカードを取り出す．取り出したカードは袋の中にもどさないものとする．10点のカードが初めて取り出されたとき，このカードも含めて取り出されたカードの合計枚数を k とする．この k 枚のカードの合計点を S とする．ただし，どのカードも取り出される確率は等しいものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) $k = 1, 2, 3, 4, 5$ となるときの確率を求めよ．

(2) S の期待値を求めよ．

3 各辺の長さが1の正三角形 OAB がある. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおき, 線分 AB を 1:2 に内分する点を C とする. さらに, 2点 P, Q は, 正の実数 k, l について, $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OQ} = l\overrightarrow{OC}$ を満たすものとする. このとき, 次の各問に答えよ.

- (1) 3点 A, P, Q が一直線上にあるとき, k と l の関係式を求めよ.
- (2) 3点 A, P, Q が一直線上にないものとし, $\triangle APQ$ の重心が $\angle AOB$ の二等分線上にあるとする. このとき, k と l の関係式を求めよ.
- (3) (2) のもとで, $AP = AQ$ となるとき, k の値を求めよ.

4 次の各問に答えよ.

(1) 方程式 $(\sqrt{2} + 1)^x + (\sqrt{2} - 1)^x = 6$ について, (A), (B) に答えよ.

(A) $(\sqrt{2} + 1)^x = \alpha$, $(\sqrt{2} - 1)^x = \beta$ とするとき, $\alpha\beta$ の値を求めよ.

(B) 方程式の解のうち最大のものを m とするとき, m の値を求めよ.

(2) $t > 4$ を満たすすべての t について, 不等式

$$(\log_2 t)^2 - b \log_2 t + 2 > 0$$

が成り立つ b の範囲を求めよ.

5 方程式 $\tan x = x$ について、次の各問に答えよ。ただし、必要であれば、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ を満たす x について、不等式 $\sin x < x < \tan x$ が成り立つことを用いてもよい。

- (1) 各自然数 n について、 $n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x = x$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。
- (2) 各自然数 n について、(1) で存在が示された解を x_n とする。このとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - x_n \right)$ を求めよ。