

# 数 学 甲(数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B・数C)

この冊子には、問題として 、、、 が出題されている。  
全問解答すること。

受 験 番 号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

1 実数  $p$  に対して、行列  $A, B, C$  をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 1+p & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに、行列  $A_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を

$$A_1 = A, A_{n+1} = A_n B - B A_n + C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1  $A_2, A_3$  を求めよ。

問 2  $A_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を推測し、その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて示せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採 点 欄	
問 1	
問 2	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2

2 中心が $(2, 0, 1)$ 、半径が $2\sqrt{5}$ の球面が $yz$ 平面と交わってできる円を $C$ とする。次の問いに答えよ。(50点)

問 1  $C$ の中心の座標と半径を求めよ。

問 2 点 $P$ は $C$ 上を動き、点 $Q$ は $xy$ 平面上の直線 $x = y$ 上を動くとする。線分 $PQ$ の長さの最小値、およびそのときの $P$ 、 $Q$ の座標を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
小計	

2 解答欄

問 1

●  
問 2

3 1から4までの番号を1つずつ書いた4枚のカードがある。この中から1枚を抜き取り、番号を記録してもとに戻す。これを $n$ 回繰り返したとき、記録された $n$ 個の数の最大公約数を $X$ とする。ただし、 $n$ は2以上の自然数とする。次の問いに答えよ。(50点)

問1  $X=3$ となる確率と $X=4$ となる確率を $n$ を用いて表せ。

問2  $X=2$ となる確率を $n$ を用いて表せ。

問3  $X$ の期待値を $n$ を用いて表せ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

4 次の問いに答えよ。(50点)

問 1 定積分  $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x \, dx$  を求めよ。

問 2  $m, n$  が自然数のとき、定積分  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$  を求めよ。

問 3  $a, b$  を実数とする。 $a, b$  の値を変化させたときの定積分  $I = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a \sin x - b \sin 2x)^2 \, dx$  の最小値、およびそのときの  $a, b$  の値を求めよ。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採 点 欄		
数 学 甲		
1		
2		
3		
4		
合 計		受 験 番 号