平成２３年度入試

個別学力試験問題（前期日程）

数　　　学

（医 学 部 医 学 科）

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は２ページ，解答用紙は４枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

$\boxed{1}$ m を自然数とする。$2^m!$ が 2^n で割り切れる自然数 n の最大値 を $N(m)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $N(5)$ を求めよ。

(2) $N(m)$ を m の式で表せ。

(3) $N(m)$ が素数ならば， m も素数であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ 半径 1 の球を O_1 とし，球 O_1 に内接する立方体を B_1 とする。次に立方体 B_1 に内接する球を O_2 とし，球 O_2 に内接する立方体を B_2 とする。以下この操作を繰り返してできる球を O_n，立方体を B_n $(n = 3, 4, \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 立方体 B_1 の 1 辺の長さ l_1 を求めよ。

(2) 球 O_n の半径 r_n を n を用いて表せ。

(3) 球 O_n の体積を V_n とし，$S_k = V_1 + V_2 + \cdots + V_k$ とするとき，$\lim_{k\to\infty} S_k$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $U = \{k \mid k$ は自然数, $1 \leqq k \leqq 25\}$ を全体集合とし，U の部分集合 A， B を次のように定める。

$$A = \{k \mid k \in U \text{ かつ } k \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}, \quad B = \{k \mid k \in U \text{ かつ } k \text{ は } 4 \text{ の倍数}\}$$

このとき， 次の問いに答えよ。

(1) 2 つの集合 $A \cap B$，$A \cup B$ を， 要素を書き並べる方法で表せ。

(2) m と n を自然数とし，2 次方程式

$$(*) \quad x^2 - mx + n = 0$$

が整数解をもつとする。このとき，n が素数ならば， 2 次方程式 $(*)$ は 1 を解としてもつことを証明せよ。

(3) m，n を集合 $\overline{A} \cap \overline{B}$ の要素とする。このとき， 2 次方程式 $(*)$ の解がすべて 2 以上の整数となる m と n の組 (m, n) をすべて求めよ。ただし，$\overline{A}$ と $\overline{B}$ は，それぞれ A と B の補集合を表す。

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ の増減，極値，グラフの凹凸を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2) 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+1}) - ax$ が極値をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$ を求めよ。