学 力 検 査 問 題

数　　学

数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ
数学A，数学B，数学C

平成24年2月25日
自　9時00分
至11時30分

答案作成上の注意

1　この問題冊子には，数学Ⅰ，数学Ⅱ，数学Ⅲ，数学A，数学B（数列，ベクトル），数学C（行列とその応用，式と曲線）の問題が**5問**あります。総ページは**13ページ**で，問題は4ページ以降の偶数ページにあります。

2　解答用紙は**5枚**です。解答はすべて**対応する番号の解答用紙**の所定の**解答欄**（表面）に記入しなさい。解答用紙の注意書きもよく読みなさい。

3　**受験番号**は，それぞれの解答用紙の所定の欄（**2ヶ所**）に必ず記入しなさい。

4　試験終了後は，**解答用紙の右上の番号の順**に並べなさい。

5　配付した解答用紙は，持ち出してはいけません。

◇M7(729—125)

空　白

空　白

〔1〕 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって，2 点 $\mathrm{P}(1,1)$，$\mathrm{Q}(2,2)$ は連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$，$1 \leqq y \leqq 2$ の表す領域内の点 P'，Q' にそれぞれ移されるものとする。ただし，a，b，c，d は正の実数で $a>c$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $a+b=1$ および $c+d=1$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 4 点 $\mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{R}(a,c)$，$\mathrm{S}(a+b,c+d)$，$\mathrm{T}(b,d)$ を頂点とする平行四辺形 ORST の面積を p とするとき，次の式が成り立つことを証明せよ。

$$A\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}=p\begin{pmatrix} b \\ -c \end{pmatrix}$$

(3) 自然数 n に対して，a_n，b_n，c_n，d_n を

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

で定める。このとき a_n，b_n，c_n，d_n を b，c，n および (2) の p を用いて表せ。

(4) $A^3=\dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 14 & 13 \\ 13 & 14 \end{pmatrix}$ となるように A を定めよ。

空　白

〔2〕 a を実数とし，$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = f(x_n) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について $x_n = a$ となるとき，a を求めよ。

(2) $a < 1$ のとき，$x_n < 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $0 < a < 1$ のとき，$x_n < x_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

空　白

〔3〕 関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3) $\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ。

空　白

〔4〕 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる3点 A，B，C が条件

$$(\cos\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (\sin\theta)\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) 2つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を θ を用いて表せ。

(3) 三角形 ABC の周の長さ $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$ を最大にする θ を求めよ。

空　白

〔5〕 n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A) P は，はじめに点 $(1, 2)$ にある。

(B) さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに $120°$ 回転し，3 以上の目が出れば時計回りに $60°$ 回転する。

(C) (B) を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1) $n = 3$ のとき，出た目が 4，1，2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2) $n = 3$ のとき，P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。

(3) $n = 6$ のとき，P が点 $(-1, -2)$ にある確率を求めよ。

(4) $n = 3m$ のとき，P が点 $(1, 2)$ にある確率を求めよ。ただし，m は自然数とする。

空　白