数　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注　意　事　項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子は 4 ページである。
3. 学部名と受験番号を，必ず 5 枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の 5 題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて 1 枚ずつ計 5 枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

24年度　◇M5(207—28)

1 次の各問いに答えよ。

(1) KADAIという語の5文字を並べて得られる順列のうち，2つのAが隣り合わないものの総数を求めよ。

(2) $x^2 - 9x + 14 > 0$ を満たさない整数 x で，3の倍数でないものをすべて求めよ。

(3) 三角形ABCにおいて，辺ABの中点をD，辺ACの中点をEとする。BE = CDならばAB = ACであることを示せ。

2 x の関数 $f(x) = 8^x + 8^{-x} - 9(4^x + 4^{-x}) + 27(2^x + 2^{-x}) - 26$ について，次の各問いに答えよ。

(1) $t = 2^x + 2^{-x}$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表したものを $g(t)$ とするとき，$g(t)$ を求めよ。

(2) $t = 2^x + 2^{-x}$ のとる値の範囲を求めよ。

(3) t が(2)で求めた範囲を動くとき，関数 $y = g(t)$ の増減を調べよ。

(4) $x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ の最小値とその最小値を与える x の値を求めよ。

3 平面上に互いに異なる3点O，A，Bがあり，それらは同一直線上にはないものとする。OA = 2，OB = 3とする。$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$とし，その内積を$\vec{a} \cdot \vec{b} = t$とおく。∠AOBの二等分線と線分ABとの交点をCとし，直線OAに関して点Bと対称な点をDとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OC}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OD}$をt，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$となるとき，∠AOBとOCを求めよ。

4 次の各問いに答えよ。ただし，eは自然対数の底とする。

(1) nを自然数とする。xの関数$f(x) = x^n e^{1-x}$について，$0 < x < 1$ならば$0 < f(x) < 1$であることを示せ。

(2) 自然数nに対して$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$とおくとき，$I_1$を求めよ。さらに，$I_{n+1}$と$I_n$の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) (2)のI_nに対して$a_n = \dfrac{I_n}{n!}$とおくとき，$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = a_1 - a_n$であることを示せ。

(4) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$とおくとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n = e - 1$であることを示せ。

5 次の４問のうちから１問を選択して解答せよ。解答用紙の所定の欄に，解答する問題の番号を記入すること。

5―1 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 4\end{pmatrix}$ と自然数 n について，次の各問いに答えよ。

(1) 次の等式を満たす α，β，p，q を求めよ。ただし，$\alpha<\beta$ とする。

$$A\begin{pmatrix}p\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}p\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}q\\1\end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix}q\\1\end{pmatrix}$$

(2) (1)で求めた p に対して $A^n\begin{pmatrix}p\\1\end{pmatrix}$ を求めよ。

(3) A^n を求めよ。

5―2 極方程式 $r=\dfrac{a}{2+\cos\theta}$ で与えられる２次曲線がある。ただし，a は正の定数とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) この２次曲線を直交座標 $(x,\ y)$ に関する方程式で表せ。

(2) (1)で求めた２次曲線を x 軸方向に $\dfrac{a}{3}$ だけ平行移動した２次曲線を C で表す。C を直交座標 x，y の方程式で表せ。また，この２次曲線 C は x 軸と２点AとBで交わる。この２点A，Bの座標を求めよ。ただし，Bの x 座標は正とする。

(3) (2)で求めた２次曲線 C 上の x 軸上にない点 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$ から x 軸に下ろした垂線をPHとする。さらにPと x 軸に関して対称な点をQとするとき，次の値は定数であることを証明せよ。

$$\frac{\mathrm{PH}\cdot\mathrm{QH}}{\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}}$$

5 — 3　1個買うごとに景品を1個もらえる商品がある。景品は全部でn種類あり，それぞれ1からnまでの番号がつけてある。また，1からnまでの数字が1つずつ記入されたn枚のカードがある。n枚のカードは外から数字が見えない箱の中に入れてあり，購入した商品1個ごとに箱の中から1枚引いて数字を確認して景品と交換する。引いたカードは，そのつど箱に戻すものとする。もらえる景品の番号は，引いたカードの数字と同じ番号のものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) この商品をm個購入したとき，番号1の景品が少なくとも1個もらえる確率を求めよ。ただし，$m > n$とする。

(2) この商品をn個購入したとき，全種類の景品がそろわない確率を求めよ。

(3) この商品を$n+1$個購入したとき，全種類の景品がもらえる確率を求めよ。

5 — 4　確率変数Zが標準正規分布$N(0, 1)$に従うとき，

$$P(Z > 1.96) = 0.025,\quad P(Z > 2.58) = 0.005,\quad \frac{2.58}{1.96} \fallingdotseq 1.32$$

であるとして，次の各問いに答えよ。

(1) 確率変数Xのとる値xの範囲が$-1 \leqq x \leqq 1$で，その確率密度関数が$f(x) = k(1 - x^2)$で与えられている。このとき，定数kの値とXの平均を求めよ。

(2) 母平均m，母標準偏差10の母集団から大きさ100の無作為標本を抽出し，その標本平均を$\overline{X}$とする。標本の大きさ100は十分大きい数であるとみなせるとする。

(a) 標本平均$\overline{X}$を用いて，母平均mの信頼度95％の信頼区間を求めよ。

(b) 母平均mを信頼度99％の信頼区間を用いて区間推定するとき，信頼区間の幅を(a)で求めた幅より小さくするためには，標本の大きさnをいくつ以上にとればよいか求めよ。