平成24年度入学者選抜学力検査問題

（前期日程）

数　　　学

理　工　学　域
　数　物　科　学　類
　物　質　化　学　類
　機　械　工　学　類
　電　子　情　報　学　類
　環境デザイン学類
　自然システム学類
医薬保健学域
　医　　　学　　　類
　薬学類・創薬科学類

（注　意）

1　問題紙は指示のあるまで開かないこと。

2　問題紙は本文2ページであり，答案用紙は4枚である。

3　答えはすべて答案用紙の指定欄に記入し，**網かけの部分や裏面には記入しないこと。**

4　問題紙と下書き用紙は持ち帰ること。

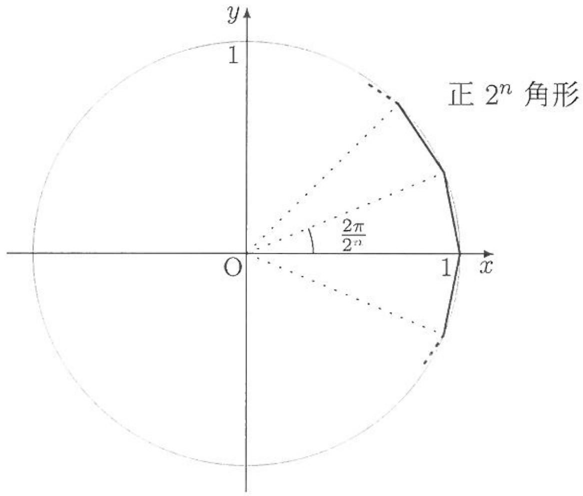
1 半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n \frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。



2 直線 $\ell : (x, y, z) = (5, 0, 0) + s\,(1, -1, 0)$ 上に点 $\mathrm{P_0}$，直線 $m : (x, y, z) = (0, 0, 2) + t\,(1, 0, 2)$ 上に点 $\mathrm{Q_0}$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1, -1, 0)$ と $(1, 0, 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3) 直線 ℓ 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{PP_0}} + \overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2 + 16$ であることを示せ。

3 次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x = t$ とおいて,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^1 f(t)\, dt$$

であることを示せ。

(2) (1) を用いて, 0 以上の整数 n に対し, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}\, dx$ の値を求めよ。また,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し,

$$\frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x - \cdots + (-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

(4) (2) と (3) を用いて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。

4 $n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回, しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_3, p_4 を求めよ。

(2) p_n を求め,

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}\, p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

であることを示せ。

(3) $s_n = p_3 + p_4 + \cdots + p_n$ として, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。ただし, 必要ならば, $|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい。