

# 平成 24 年度 入学試験 問題

## 数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、学生募集要項に記載のとおり。》

### (注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある(1 ページから 2 ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、書き方をはつきり示して計算用ページに解答の続きを書いてても良い。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(35点)

次の各問に答えよ.

(1)  $a$  が正の実数のとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$  を求めよ.

(2) 定積分  $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} \log \sqrt{1+x^2} dx$  の値を求めよ.

2

(30点)

正四面体OABCにおいて、点P, Q, Rをそれぞれ辺OA, OB, OC上にとる。ただしP, Q, Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする。 $\triangle PQR$  が正三角形ならば、3辺PQ, QR, RPはそれぞれ3辺AB, BC, CAに平行であることを証明せよ。

3

(30点)

実数  $x, y$  が条件  $x^2 + xy + y^2 = 6$  を満たしながら動くとき

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。

4

(35点)

- (1)  $\sqrt[3]{2}$  が無理数であることを証明せよ.
- (2)  $P(x)$  は有理数を係数とする  $x$  の多項式で,  $P(\sqrt[3]{2}) = 0$  を満たしているとする. このとき  $P(x)$  は  $x^3 - 2$  で割り切れることを証明せよ.

5

(35点)

次の命題 (p), (q) のそれぞれについて, 正しいかどうか答えよ. 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ.

- (p) 正  $n$  角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが  $60^\circ$  である三角形を作ることができるならば,  $n$  は 3 の倍数である.
- (q)  $\triangle ABC$  と  $\triangle ABD$  において,  $AC < AD$ かつ  $BC < BD$  ならば,  $\angle C > \angle D$  である.

6

(35点)

さいころを  $n$  回投げて出た目を順に  $X_1, X_2, \dots, X_n$  とする. さらに

$$Y_1 = X_1, Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, \dots, n)$$

によって  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  を定める.

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$$

となる確率  $p_n$  を求めよ.

問題は、このページで終わりである。