平成24年度 入学試験問題

数　学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	1	2	4	5
経済学部	2	3		
医学部	1	6	7	8
歯学部	1	4	5	6
薬学部	1	2	4	5
工学部	1	4	5	6
環境科学部	2	3		
水産学部	2	3		

$\boxed{1}$ 四面体 OABC において

$$\mathrm{OA}=1,\quad \mathrm{OB}=3,\quad \mathrm{OC}=2,$$

$$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ,\ \angle\mathrm{AOC}=\angle\mathrm{BOC}=120^\circ$$

とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 平面 ABC 上に点 H をとり，s, t, u を実数として

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$$

とおく。このとき，$s+t+u=1$ となることを示せ。

(2) (1) の $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が平面 ABC に垂直であるとき，s, t, u の値をそれぞれ求めよ。

(3) 平面 OAB 上に点 K をとり，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ が平面 OAB に垂直であるとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{CK}}$ の大きさと四面体 OABC の体積を求めよ。

$\boxed{1}$ (下書き用紙)

2 次の問いに答えよ。

(1) m を 5 以上の自然数とする。次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明せよ。

$$m! > 2^m > m^2$$

(2) 自然数 n に対する次の和を求めよ。

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$$

(3) (2) で求めた S_n について，$S_n < \dfrac{3}{4}$ が成り立つことを示せ。

(4) (2) で求めた S_n について，$S_n > \dfrac{2}{3}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{2}$ （下書き用紙）

3 3点 P(4, −5), Q(0, 3), R(7, 4) を通る円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおいて，a, b, c の値を求めよ。

(2) 点 S(−4, 0) を通り，傾き m の直線を l とする。直線 l が円 C と2つの交点をもつような傾き m の範囲を求めよ。

(3) 傾き m が (2) の範囲にあるとき，直線 l と円 C の2つの交点の中点の軌跡はある円の一部分であることを示し，その軌跡を求めよ。

$\boxed{3}$ （下書き用紙）

4　a を正の定数とする。次の問いに答えよ。

(1)　半径 a の球面に内接する円柱の高さを g，底面の半径を r とする。r を a と g を用いて表せ。

(2)　(1) の円柱で，体積が最大になるときの高さ，およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ。

(3)　半径 a の球面に内接する円錐(すい)がある。ただし，円錐の頂点と底面の中心を結ぶ線分は球の中心を通るものとする。円錐の高さを h，底面の半径を s とする。s を a と h を用いて表せ。

(4)　(3) の円錐で，体積が最大になるときの高さ，およびそのときの底面の半径と体積をそれぞれ a を用いて表せ。

$\boxed{4}$ （下書き用紙）

$\boxed{5}$ 関数 $f(x) = xe^{-x^2}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸，および変曲点を調べて，そのグラフをかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x^2} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0$ を用いてよい。

(2) $y = f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

(3) $t > 0$ とする。曲線 $y = f(x)$，x 軸，および直線 $x = t$ で囲まれた部分の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) (3) で求めた $S(t)$ について，$\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ （下書き用紙）

6 次の問いに答えよ。

(1) $I_1=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+1}$ とする。$x=\tan\theta$ とおくことにより，$I_1=\dfrac{\pi}{3}$ を示せ。

(2) (1) の I_1 を部分積分して，I_1 と $I_2=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ の関係式を導き，I_2 の値を求めよ。

(3) $t=x+\sqrt{x^2+1}$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

(4) 合成関数の微分法を用いて，関数 $y=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ の導関数を求めよ。

(5) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right\}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ （下書き用紙）

7 原点 O を中心とし，半径 1 の円を C とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 $y=2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 2)$ から円 C に 2 本の接線を引き，その接点を M，N とする。直線 OP と弦 MN の交点を Q とする。点 Q の座標を t を用いて表せ。ただし，t は実数とする。

(2) 点 P が直線 $y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。

$\boxed{7}$ （下書き用紙）

$\boxed{8}$ 実数 x, y が連立不等式

$$\begin{cases} 10^{10} < 2^x 3^y < 10^{11} & \cdots\cdots \text{(A)} \\ 10^9 < 3^x 2^y < 10^{10} & \cdots\cdots \text{(B)} \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) 連立不等式 (A)，(B) が表す xy 平面上の領域は，どのような図形であるか答えよ。また，その理由を述べよ。

(2) 連立不等式 (A)，(B) が満たす実数 x，y において，$x+y$ がとりうる値の範囲，および $y-x$ がとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) 連立不等式 (A)，(B) を満たす整数 x，y を考える。このとき，$y-x$ が最大となる整数 x，y を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。

8 （下書き用紙）