平成２４年度入学試験問題

数　　学

（数学Ⅰ・数学Ⅱ・数学Ⅲ・数学Ａ・数学Ｂ・数学Ｃ）

注　　意

1　問題冊子は１冊，解答用紙は４枚，下書き用紙は３枚です。

2　すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の指定されたところに書きなさい。
　　また，答だけではなく途中の手順や考え方も記述しなさい。
　　ただし，裏面は採点の対象になりません。

4　試験終了後，問題冊子と下書き用紙は必ず持ち帰りなさい。

数 学 (数学I・数学II・数学III・数学A・数学B・数学C)

1

O を原点とする座標平面における曲線 C : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上に, 点 $\mathrm{P}\left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1) C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2) 点 Q が C 上を動くとき, $\triangle$OPQ の面積の最大値と, 最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。

2

表の出る確率が p, 裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p, q は正の定数で, $p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x, y)\,|\,0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$$

とし, D 上を動く点 Q を考える。Q は 点 $(0,0)$ から出発し, 硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み, 裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお, この規則で D 上を進めないときには, その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 硬貨を4回投げて Q が点 $(2,2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2) 硬貨を5回投げて5回目に初めて Q が点 $(2,2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3) $P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき, p の値を求めよ。

3

a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$, $C_2 : y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし必要ならば $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

(1) $t > 0$ の範囲で, 関数 $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1, C_2 の共有点の個数を求めよ。

(3) C_1, C_2 の共有点の個数が 2 のとき, これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

4

$f(x) = 4x(1-x)$ とする。 このとき

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x), \\ f_{n+1}(x) = f_n\bigl(f(x)\bigr) \quad (n = 1, 2, \cdots\cdots) \end{cases}$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f_2(x) = 0$ を解け。

(2) $0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し, 方程式 $f(x) = t$ の解を $\alpha(t)$, $\beta(t)$ とする。c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c) = 0$ を満たすとき, $\alpha(c)$, $\beta(c)$ は $f_{n+1}(x) = 0$ の解であることを示せ。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x) = 0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し, 一般項 S_n を求めよ。