B

平成24年度

前期日程

数学問題

〔注　意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計10か所）に右詰めで正確に記入すること．**
3. 問題本文は，3ページと，5ページと，7ページと，9ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．
4. 解答用冊子には表紙1枚と解答用紙5枚と白紙2枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，解答用紙の指定されたところに記入すること．**指定された場所以外に記入してはいけない．**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない．
8. 問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること．

$\boxed{1}$ $a>0$ とする．C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする．$f(a)$ を a を用いて表せ．

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ 次の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす自然数 n について考える．

(i) n は素数ではない．

(ii) l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず

$$|l-m| \leqq 2$$

である．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) n が偶数のとき，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

(2) n が 7 の倍数のとき，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

(3) $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii) をみたす n をすべて求めよ．

（配点率 20 %）

3 xyz 空間に 3 点 O$(0,0,0)$, A$(1,0,1)$, B$(0,\sqrt{3},1)$ がある．平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする．点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく．同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をみたす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく．さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 平面 $z=\cos\theta$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ．

(2) 立体 V の体積を求めよ．

（配点率 20 %）

4 5 次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ ($p,\ q,\ r,\ s,\ t$ は実数) について考える．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 数列 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m$$

(l, m は実数) と書けることは互いに同値であることを示せ．

(2) $f(x)$ は (1) の条件をみたすものとする．α を実数，k を 3 以上の自然数とする．k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{5}$ 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき, 1 回目に出る目を l, 2 回目に出る目を m, 3 回目に出る目を n で表すことにする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 極限値

$$\lim_{x \to -1} \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が存在する確率を求めよ.

(2) 関数

$$f(x) = \frac{lx^2 + mx + n}{x + 1}$$

が, $x > -1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ.

（配点率 20 %）