

平成24年度入試
個別学力試験問題（前期日程）

数 学
(医学部医学科)

注 意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけない。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚である。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入すること。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入すること。
4. 解答用紙の裏面は使わないこと。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときは，小問の結論を明示すること。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ること。

- 1 直線上に $n+1$ 個の点 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ がこの順に並んでいて、隣り合う 2 点間の距離

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n$$

がそれぞれ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}$ となっている。この $n+1$ 個の点から、同様の確からしさで異なる 2 点を選び、その距離を d とする。このとき、 d の期待値を求めよ。

- 2 四角形 ABCD において、直線 AB と直線 CD は点 O で交わり、直線 BC と直線 DA は点 P で交わり、直線 OP と直線 AC は点 Q で交わり、直線 OP と直線 BD は点 R で交わっているとす。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OC} = h\vec{a} + k\vec{p}$ とするとき、次の問いに答えよ。

(1) \overrightarrow{OB} を \vec{a} , h , k を用いて表せ。

(2) \overrightarrow{OD} を \vec{a} , \vec{p} , h , k を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OQ} = x\vec{p}$, $\overrightarrow{OR} = y\vec{p}$, $\overrightarrow{PQ} = z\vec{p}$, $\overrightarrow{PR} = w\vec{p}$ とするとき、 $\frac{yz}{xw}$ の値を求めよ。

3 関数

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ の値を求め、さらに $f'(x) < 0$ であることを証明せよ。
- (3) 関数 $y = f(x)$ の凹凸と漸近線を調べ、そのグラフの概形をかけ。

4 a, b を定数とし、 $a \neq 0$ とする。連立1次方程式

$$\begin{cases} 2x + (a-1)y = b \\ ax + a^2y = 1 \end{cases} \quad \dots\dots(\star)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) (\star) が2組以上の解をもつような a と b の値を求めよ。
- (2) (\star) が $x = 1, y = 2$ をただ1組の解としてもつような a と b の値を求めよ。
- (3) (\star) が $x = y$ となる解をもつための a と b に関する必要十分条件を求めよ。