

平成 25 年 度  
前 期 日 程

# 数 学

教育学部[数学(口)]

医学部医学科

工学部

## 問 題 冊 子

### 注意事項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開かないこと。
2. 本冊子は 5 ページで、解答用紙は 5 枚である。  
落丁、乱丁、印刷不鮮明などの箇所があった場合には、ただちに試験監督者に申し出ること。
3. 受験番号は、5 枚の解答用紙のそれぞれの指定箇所に必ず記入すること。
4. 問題は、大問 5 題である。
5. 解答は、解答用紙の指定箇所に記入すること。(ただし、やむをえない場合は裏面にまわってよい。)
6. 問題用紙の余白は計算に用いてよい。
7. 解答用紙は持ち帰らないこと。
8. 問題冊子は持ち帰ること。
9. 大問ごとに、満点に対する配点の比率(%)を表示してある。

## 教育学部[数学(口)]

### 医学部医学科

### 工学部

1  $a, b$  を正の実数とする。 $xy$  平面上の放物線  $y = x^2 - 2ax$  と直線  $y = bx$  は原点  $O$  と点  $A$  の異なる 2 点で交わる。また、放物線の頂点を  $B$  とし、三角形  $OAB$  を考える。以下の問に答えよ。

- (1) 点  $A$  および点  $B$  の座標を求めよ。
- (2) 三角形  $OAB$  が直角三角形のとき、 $a$  と  $b$  の満たすべき条件を求めよ。
- (3)  $a = b$  のとき、 $\cos \angle AOB$  を  $a$  を用いて表せ。
- (4)  $a = b$  のとき、三角形  $OAB$  の面積を  $a$  を用いて表せ。

(配点比率 20%)

2  $xy$  平面上に中心  $(1, 0)$ , 半径  $2$  の円  $C$  がある。円  $C$  と  $y$  軸との交点のうち,  $y$  座標が負である点を  $P$  とする。以下の問に答えよ。

- (1) 点  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 点  $Q$  が円  $C$  の周から点  $P$  を除いた部分を動くとき, 線分  $PQ$  の中点  $R$  の軌跡を求めよ。
- (3) 点  $Q$  は円  $C$  の周から点  $P$  を除いた部分を動くとする。また,  $k$  を  $1$  以外の正の実数とし, 線分  $PQ$  を  $k:1$  に外分する点を  $S$  とする。このとき点  $S$  の軌跡を求めよ。
- (4)  $k = 3$  のとき, 直線  $y = x + a + \frac{\sqrt{3}}{2}$  が (3) で求めた軌跡と共有点をもつような  $a$  の値の範囲を求めよ。

(配点比率 20%)

3 1 から 9 までの数字が 1 つずつ重複せずに書かれた 9 枚のカードがある。そのうち 8 枚のカードを A, B, C, D の 4 人に 2 枚ずつ分ける。以下の間に答えよ。

- (1) 9 枚のカードの分け方は全部で何通りあるか。
- (2) 各人が持っている 2 枚のカードに書かれた数の和が 4 人とも奇数である確率を求めよ。
- (3) 各人が持っている 2 枚のカードに書かれた数の差が 4 人とも同じである確率を求めよ。ただし、2 枚のカードに書かれた数の差とは、大きいほうの数から小さいほうの数を引いた数である。

(配点比率 20 %)

4 正の整数  $n$  について,  $x > 0$  で定義された関数  $f_n(x)$  を次で定める。

$$f_1(x) = x \log x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+1) \int_1^x f_n(t) dt + \frac{1}{n+1} (x^{n+1} - 1)$$

以下の問に答えよ。ただし,  $\log x$  は  $x$  の自然対数とする。

- (1) 関数  $f_2(x)$  を求めよ。
- (2) 関数  $f_n(x)$  の具体的な形を推測し, それを数学的帰納法で証明せよ。
- (3)  $g(x) = |f_2(x)| - |x - 1|$  とおくと,  $g(x)$  が  $x = 1$  で微分可能であることを証明せよ。  
また, 微分係数  $g'(1)$  を求めよ。

(配点比率 20 %)

5  $a, b$  を  $a^2 + \frac{b^2}{6} = 1$  を満たす正の実数とする。行列  $A = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}a & b \\ -b & -\sqrt{2}a \end{pmatrix}$  に対して、以下の問に答えよ。

(1) 実数  $p, q$  が  $A^2 = pA + qE$  を満たすとき、 $p, q$  を  $a$  を用いて表せ。ただし、 $E$  は 2 次の単位行列とする。

(2)  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき、 $\sum_{k=1}^{100} (-1)^k A^k$  を求めよ。

(3)  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$  とし、 $m$  を正の整数とする。 $x$  と  $y$  についての方程式  $A^m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$  が  $x = y = 0$  以外の解をもつとき、 $m$  の満たす条件を求めよ。

(配点比率 20%)