数　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子には，問題文のページが 6 ページある。
3. 学部名と受験番号及び氏名を，必ず 5 枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の 5 題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて 1 枚ずつ計 5 枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 四角形ABCDにおいて，線分ACと線分BDの交点をPとし，$\angle DAC = \angle CBD$，$AC = 8$，$AP = 2$，$PD = 4$とする。このときBDの長さを求めよ。

(2) 平面上で2つの円を考える。共通接線がちょうど3本引けるような2つの円の位置関係の例を図示せよ。また，3本の共通接線も描け。

(3) 3個のさいころを同時に投げるとき，3個の目の積が3の倍数である確率を求めよ。

(4) a，bを実数とする。命題「$ab = 0$ならば，$a = 0$かつ$b = 0$」の逆と対偶を書き，それぞれの真偽を答えよ。

2 次の各問いに答えよ。

(1) 次の(a), (b)に答えよ。

(a) m, n が自然数ならば, $\dfrac{m}{n} \neq \sqrt{2}$ である。このことを証明せよ。

(b) p, q が自然数ならば, $\sqrt{2}$ は $\dfrac{p}{q}$ と $\dfrac{2q}{p}$ の間にある。すなわち

$$\frac{p}{q} < \sqrt{2} < \frac{2q}{p} \quad \text{または} \quad \frac{2q}{p} < \sqrt{2} < \frac{p}{q}$$

が成り立つ。このことを証明せよ。

(2) 定数 a は実数で, $a > 0$, $a \neq 1$ とする。このとき, すべての正の実数 x, y に対して $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ が成り立つ。このことを証明せよ。

◇M5(056—32)

$\boxed{3}$ 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の垂心を H とする。次の等式が成り立つことを示せ。

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$$

ただし，三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした3本の垂線は1点で交わる。この点を三角形の垂心という。

(2) 次の (a)，(b) に答えよ。

(a) 自然数 n に対して自然数 a_n を次のように定義する。

$$a_n=(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1$$

このとき，すべての自然数 k に対して $(2k)!=2^k k!\, a_k$ が成り立つ。このことを証明せよ。

(b) すべての自然数 n に対して，$2^n!$ は $2^{(2^n-1)}$ で割り切れる。このことを数学的帰納法で証明せよ。

4 次の各問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x \, dx$ を求めよ。

(3) m, n を自然数とする。$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{2013} \sin kx \right)^2 dx$ を求めよ。

5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。

5―1 2次の正方行列$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$に対して，$\Delta(A)=ad-bc$とおく。たとえば単位行列$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$に対しては$\Delta(E)=1\times1-0\times0=1$となる。また$K=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$に対しては$\Delta(K)=2\times7-3\times5=-1$となる。次の各問いに答えよ。

(1) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$に対して$R=PQ$とおく。$\Delta(P)$，$\Delta(Q)$，$\Delta(R)$を計算し，$\Delta(R)=\Delta(P)\Delta(Q)$が成り立つことを確かめよ。

(2) すべての2次の正方行列A，Bに対して，$C=AB$とおくと$\Delta(C)=\Delta(A)\Delta(B)$が成り立つことを示せ。

(3) $X^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$となる2次の正方行列$X$ですべての成分が実数であるようなものは存在しないことを示せ。

(4) 2次の正方行列Aに逆行列Bが存在したとする。AとBの成分がすべて整数ならば，$\Delta(A)$は1か-1のどちらかである。このことを示せ。

5―2 xy平面において，点F$(p,\ 0)$とy軸から等距離にある点の軌跡をCとする。ただし$p>0$とする。次の各問いに答えよ。

(1) Cを表す方程式を求めよ。

(2) C上の点P$(x_0,\ y_0)$におけるCの接線lの方程式を求めよ。ただし$y_0\neq0$とする。

(3) (2)のlとx軸の交点をQとするとき，FP＝FQであることを証明せよ。

5－3　０，１，２，３，４の数字が１つずつ記入された５枚のカードがある。この５枚のカードの中から１枚引き，数字を記録して戻すという作業を３回繰り返す。ただし，３回ともどのカードを引く確率も等しいとする。記録した３つの数字の最小値をXとするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$k=0,1,2,3,4$に対して確率$P(X \geqq k)$を求めよ。

(2)　確率変数Xの確率分布を表で表せ。

(3)　確率変数Xの平均(期待値)　$E(X)$を求めよ。

(4)　確率変数Xの分散$V(X)$を求めよ。

5－4　確率変数Xのとる値の範囲が$0 \leqq X \leqq 2$で，その確率密度関数$f(x)$が次の式で与えられるものとする。

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{a}x & (0 \leqq x \leqq a) \\ \dfrac{k}{2-a}(2-x) & (a < x \leqq 2) \end{cases}$$

ここで，a，kは$0<a<1$，$k>0$を満たす定数である。次の各問いに答えよ。

(1)　定数kの値を求めよ。

(2)　Xの平均(期待値)　$E(X)$をaを用いて表せ。

(3)　$P(X \leqq u)=0.5$となる実数uをaを用いて表せ。