平成25年度 入学試験問題

数　学

注 意 事 項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	3	4	5	6
経済学部	1	2		
医学部	3	4	6	7
歯学部	3	4	5	6
薬学部	3	4	5	6
工学部	3	4	5	6
環境科学部	1	2		
水産学部	1	2		

1 円 $C_1: x^2-4x+y^2=0$ と直線 $l: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 円 C_1 と直線 l の交点のうち，原点 O と異なるものを A とする。点 A の座標を求めよ。さらに，原点 O を頂点とし，点 A を通る放物線 C_2 の方程式を $y=ax^2$ とする。a の値を求めよ。

(2) 直線 l の傾きを $\tan\theta$ と表す。そのときの θ の値を求めよ。ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(3) 円 C_1 と直線 l で囲まれた図形のうち，直線 l の上側にある部分の面積 S_1 を求めよ。

(4) 円 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，放物線 C_2 の上側にある部分の面積 S_2 を求めよ。

(5) 放物線 C_2 の接線で，直線 l とのなす角が $\dfrac{\pi}{4}$ であるものを考える。そのすべてについて，接点の x 座標を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} + 2a_{n+1}a_n - 3a_n = 0$ $(n \geqq 1)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，a_2，a_3，a_4，a_5 の値を求めよ。また，一般項 a_n を推測し，その推測の結果を数学的帰納法で証明せよ。

(2) $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ であることを利用して $\sin \dfrac{7}{12}\pi$ を求め，$1 \leqq x \leqq 4$ のとき，次の方程式を解け。

$$\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ とする。このとき，$X = \log_2 \cos x$ の範囲を求め，次の不等式を解け。

$$2\left(\log_2 \cos x\right)^2 + \left(4 - \log_2 3\right)\log_2 \cos x + 2 - \log_2 3 \leqq 0$$

注意： $\log_2 \cos x$ は $\log_2(\cos x)$ を表す。

3 n を 2 以上の整数とする。n 個の実数 a_1, a_2, $\cdots$, a_n が与えられたとき,

$$P_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2, \qquad Q_n = {a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2$$

とおく。次に, $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $a_i a_j$ の和を R_n とする。たとえば,

$$R_2 = a_1 a_2, \qquad R_3 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$$

である。

同様に, $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たすすべての番号 i, j に対する $(a_i - a_j)^2$ の和を S_n とする。たとえば,

$$S_2 = (a_1 - a_2)^2, \qquad S_3 = (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2$$

である。次の問いに答えよ。

(1) P_4 を Q_4 と R_4 を使って表せ。

(2) すべての $n \geqq 2$ に対して $S_n = (n-1)Q_n - 2R_n$ と表されることを, 数学的帰納法で証明せよ。

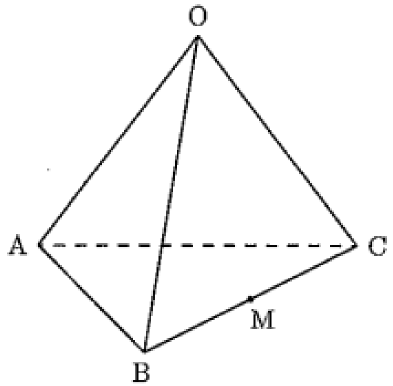
(3) Q_4 を P_4 と S_4 を使って表せ。

(4) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$ のとき, Q_4 の最小値と, そのときの a_1, a_2, a_3, a_4 の値をそれぞれ求めよ。

4 右図のような四面体OABCがある。各面ABC，OBC，OCA，OABの重心を，それぞれP，Q，R，Sとし，辺BCの中点をMとする。また，

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$



とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{m}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(2) 線分OPと線分AQの交点をGとする。線分OP上の点Uは，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OU}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{OP}} \qquad (0 \leqq s \leqq 1)$$

と表され，線分AQ上の点Vは，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=(1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

と表される。このことを利用して，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{m}$ を用いて表せ。

(3) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を表せ。

(4) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の中から必要なものを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ をそれぞれ表せ。

また，点Gが線分BRおよび線分CS上にあることを示せ。

5 曲線 $C: y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, e^t)$ における接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l と x 軸の交点，接線 l と y 軸の交点の座標をそれぞれ求めよ。

(3) 曲線 C，接線 l，y 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $0 \leqq t \leqq 1$ とする。このとき，$S(t)$ の最大値およびそのときの t の値，$S(t)$ の最小値およびそのときの t の値をそれぞれ求めよ。

6 次の問いに答えよ。

(1) 関数

$$y = -x + 2 - \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

の増減およびグラフの凹凸を調べよ。また，y の最大値およびそのときの x の値，y の最小値およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 2つの曲線

$$y = -x + 2 - \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

と

$$y = -x + 2 + \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

によって囲まれた図形 D を答案用紙の座標平面上に描け。なお，D の境界が座標軸との共有点をもつならば，その座標も記入せよ。

(3) 上の図形 D を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

7 半径1の円と長さ2の線分がある。この線分の一方の端点を，円の中心に合わせて円上に固定した図形を考える。線分の端点で，円の中心とは異なるものをPとする。

この図形を下の図1のように xy 平面上に置く。すなわち，中心が点 $(0, 1)$，P が点 $(0, -1)$ と一致するように置く。

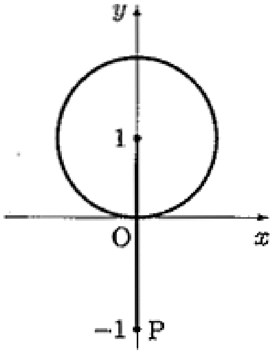


図1

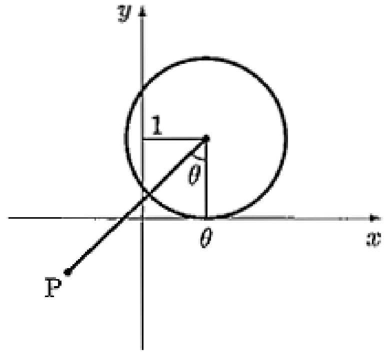


図2

次に，x 軸上で正の方向に，すべらないように円を半回転させる。上の図2は円が θ だけ回転したときの状態を表している。

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で，点Pが描く曲線 C について考察する。次の問いに答えよ。

(1) 図2における点Pの x 座標と y 座標を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2) 曲線 C 上にあって，x 座標が最小となる点，最大となる点，y 座標が最小となる点，最大となる点について，それぞれの座標を求めよ。

(3) 曲線 C と2直線 $y = -1$ および $x = \pi$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。