（前期日程）

平成26年度　数　学

問題の選択方法

- 教育学部，農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースの受験者は，

  1　2　3　4の4問
- 理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）の受験者は，

  4　5　6　7　8の5問
- 医学部の受験者は，

  4　6　7　8　9の5問

を解答すること。

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，18ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は，解答用紙の裏も使用してよい。ただし，裏を使用する場合は，その旨を解答用紙の表に明記し，裏に書かれた指示に従って解答すること。

4　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

1 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{AB}=1$，$\angle \mathrm{A}=90^\circ$ を満たす直角二等辺三角形ABCにおいて，辺ABの中点をP，辺ACを $2:1$ に内分する点をQ，線分CPと線分BQの交点をRとする。このとき，線分ARの長さを求めよ。

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{26}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。ただし，必要ならば $\log_{10}3=0.4771$ として計算せよ。

(3) k を実数とし，不等式 $x^2-2x-3>0$，$x^2-(k+1)x+k>0$ を満たす実数 x の集合をそれぞれ A，B とする。このとき，$A\subset B$ であるための必要十分条件を k を用いて表せ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

t，x は実数とする。関数 $f(t)$ を $f(t) = 2\,|t-1| + t + 1$ と定義し，
$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ とおく。

(1) 関数 $y = f(t)$ のグラフをかけ。

(2) 関数 $F(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = F(x)$ 上の点 $(0,\ F(0))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(4) 曲線 $y = F(x)$ と(3)で求めた接線 ℓ とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

3 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

A は 3 桁（けた）の自然数で，その百の位の数 x，十の位の数 y，一の位の数 z は，

$$100x + 10y + z = x! + y! + z!$$

を満たしている。

(1) $6!$ の値を求め，x，y，z はすべて 5 以下であることを示せ。

(2) x は 3 以下であることを示せ。

(3) y，z のうち少なくとも 1 つは 5 であることを示せ。

(4) A を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

4 (教育学部・農学部・理学部・工学部・医学部)

n を 0 以上の整数とする。点 P，Q は，1 辺の長さが 1 である正四面体 ABCD の頂点の上を，以下の条件 (a)，(b) を満たしながら移動する。

(a) 時刻 $t=0$ において，点 P は頂点 A に，点 Q は頂点 B にいる。

(b) 時刻 $t=n+1$ において，点 P と点 Q は各々，時刻 $t=n$ のときにいた頂点から，他の 3 つの頂点のいずれかに，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 $t=n$ における点 P と点 Q の間の距離を d_n とおく。d_n の値は 0 または 1 である。時刻 $t=n$ において $d_n=1$ となる確率を p_n とする。

(1) 時刻 $t=1$ とする。

(i) 点 P が頂点 C にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか。

(ii) 点 P が頂点 B にいるとき，$d_1=1$ となる点 Q の位置は何通りか。

(2) p_1 を求めよ。

(3) $d_1+d_2=1$ となる確率を求めよ。

(4) p_{n+1} を p_n で表し，p_n を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

5 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く））

次の問いに答えよ。

(1) すべての実数 x に対して

$$f(x) = \sin \pi x + \int_0^1 t f(t)\, dt$$

が成り立つような関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta^3}{\tan\theta - \sin\theta}$$

(3) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(4) 関数 $f(x) = |x|(e^x + a)$ は $x = 0$ において微分可能であるとする。このとき，定数 a の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

6 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

n は自然数，m は整数，k，α，β は実数とする。

(1) $\alpha \geqq 1$，$\beta \geqq 1$ のとき，$\alpha\beta \geqq \alpha + \beta - 1$ が成り立つことを示せ。

(2) x に関する2次方程式 $x^2 - mx + k = 0$ の2つの解を p，q とする。p が整数ならば，q と k も整数であることを示せ。

(3) x に関する2次方程式 $x^2 - n^2x + n = 0$ は，整数の解をもたないことを示せ。

(4) x に関する2次方程式 $x^2 - (n-2)^2x + n = 0$ が整数の解をもつとき，n の値とその解をすべて求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

7 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

a，bは，$0<b<a$を満たす実数とする。曲線$y=e^x$上の点$(0,\ 1)$における接線ℓ_1の方程式を$y=f(x)$，点$(a,\ e^a)$における接線ℓ_2の方程式を$y=g(x)$とおく。また，ℓ_1とℓ_2の交点のx座標を$p(a)$とする。連立不等式

$$0 \leqq x \leqq b, \qquad f(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_1，連立不等式

$$b \leqq x \leqq a, \qquad g(x) \leqq y \leqq e^x$$

の表す領域の面積をS_2とし，$R=e^{-b}S_2$とおく。このとき，次の問いに答えよ。必要ならば，すべての自然数kに対して$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x}=0$が成り立つことを用いてよい。

(1) $p(a)$を求めよ。

(2) S_1とS_2を求めよ。

(3) $t=a-b$とする。Rをtのみの関数として表せ。

(4) 極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(a-p(a))$を求めよ。

(5) $b=p(a)$とする。このとき，極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

8 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$とし，$t$ は実数とする。A は，$A^3=E$ を満たす2次の正方行列とする。

(1) $(A-tE)(A^2+tA+t^2E)$ を t と E を用いて表せ。

(2) $t \neq 1$ のとき $A-tE$ は逆行列をもつことを示せ。

(3) 次の3つの命題を証明せよ。

(i) $A=E$ ならば，$A^2+A+E \neq O$ である。

(ii) $A^2+A+E \neq O$ ならば，$A-E$ は逆行列をもたない。

(iii) $A-E$ が逆行列をもたないならば，$A=E$ である。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

9 (医学部)

nは自然数，p_0, p_1, …, p_nは$p_0 > 0$，$p_1 > 0$，…，$p_n > 0$かつ$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1$を満たす定数とする。ポイント

$$0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n$$

が，それぞれ

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_{n-1},\ p_n$$

の確率で得られる試行Tを考える。試行Tを1回行って得られるポイントの期待値をaとし，$A = [a] + 1$とする。ただし，実数xに対して$[x]$はxを超えない最大の整数を表す。

競技者は，試行Tを下記の各設問のルールに従って何回か行う。

(1) kを$1 \leqq k \leqq n$を満たす整数とする。競技者は，試行Tを以下のルールに従って最大2回まで行う。

① 試行Tを1回行い，もしポイントがk以上であれば2回目の試行を行わず，このポイントを賞金とする。

② 1回目のポイントがk未満であれば2回目の試行Tを行う。このとき，1回目のポイントは無効とし，2回目のポイントを賞金とする。

このとき賞金の期待値をb_kとする。b_kを求めよ。

(2) (1)の期待値b_kはkがAのとき最大となることを示せ。

(3) m を $1 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大 3 回まで行う。

① 試行 T を 1 回行い，もしポイントが m 以上であれば 2 回目以降の試行を行わず，このポイントを賞金とする。

② 1 回目のポイントが m 未満であれば 2 回目の試行 T を行う。2 回目のポイントが A 以上であれば 3 回目の試行を行わない。このとき，1 回目のポイントは無効とし，2 回目のポイントを賞金とする。

③ 2 回目のポイントが A 未満であれば 3 回目の試行 T を行う。このとき，1 回目，2 回目のポイントは無効とし，3 回目のポイントを賞金とする。

このとき賞金の期待値を c_m とする。c_m を求めよ。

(4) (3) の期待値 c_m は m が $B = [b_A] + 1$ のとき最大となり，$c_B \geqq b_A$ であることを示せ。ただし，b_A は (1) で求めた期待値 b_k の $k = A$ のときの値である。

(5) $n = 5$ とし，試行 T として，5 枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数をポイントとする試行を考える。また，b_k，c_m は上記で定義したものとする。

(i) p_0，p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，a を求めよ。

(ii) (1) のように最大 2 回試行を行う場合，b_k の最大値を求めよ。

(iii) (3) のように最大 3 回試行を行う場合，c_m の最大値を求めよ。