数　学

〔理学部（数理情報科学科・物理科学科・地球環境科学科）・医学部（医学科）・歯学部・工学部〕

注 意 事 項

1. 「解答始め」の合図があるまでこの冊子は開かないこと。
2. この冊子には，問題文のページが 6 ページある。
3. 学部名と受験番号及び氏名を，必ず 5 枚の解答用紙のそれぞれに記入すること。
4. 解答用紙は切り離して使用すること。
5. 解答は，所定の解答用紙の解答欄に記入し終えるようにし，裏面には決して記入しないこと。
6. 問題は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ の 5 題ある。
7. 解答用紙は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のそれぞれについて 1 枚ずつ計 5 枚ある。
8. $\boxed{5}$ は選択問題であるから，解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。
9. 解答は，論証および計算の進め方がはっきり分かるように，順序よく的確に表現すること。また，文字は丁寧に書くこと。

1 次の各問いに答えよ。

(1) 三角形ABCにおいて辺AB上に点Dを，辺AC上に点Eをとり，線分BEと線分CDの交点をFとする。点A，D，E，Fが同一円周上にあり，さらに角のあいだに

$$\angle AEB = 2\angle ABE = 4\angle ACD$$

という関係が成り立つとき，∠BACの値を求めよ。

(2) 4個のさいころを同時に投げるとき，3の倍数の目のみが出る確率を求めよ。

(3) 正の実数x，yに関する次の各命題の真偽を述べよ。また，真ならば証明し，偽ならば反例をあげよ。

(a) xが無理数かつyが有理数ならば，その和$x+y$は無理数である。

(b) xが無理数かつyが無理数ならば，その和$x+y$は無理数である。

2 次の各問いに答えよ。

(1) a，b，c は互いに異なる実数で，$a>1$，$b>1$，$c>1$ とする。次の等式が成り立つとき，比 $\log_2 a : \log_2 b : \log_2 c$ を求めよ。

$$\log_2 a - \log_8 b = \log_2 b - \log_8 c, \qquad \frac{\log_2 a}{\log_8 b} = \frac{\log_2 b}{\log_8 c}$$

(2) 次の (a), (b), (c) に答えよ。

(a) $t = x + \dfrac{1}{x}$ とおく。このとき，$x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ と $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ をそれぞれ t についての多項式で表せ。

(b) $\dfrac{2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2}{x^2}$ を t についての多項式で表せ。

(c) 4 次方程式 $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 2 = 0$ の解を全て求めよ。

3 rを実数とする。$\{a_n\}$を

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_{n+2} = ra_{n+1} - 4a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定められる数列とする。次の各問いに答えよ。

(1) $r = 0$ の場合に，以下のそれぞれについて一般項 a_n を n の式で表せ。

(i) n が奇数のとき。

(ii) n が偶数のとき。

(2) $r = 5$ の場合に，次の (a), (b) に答えよ。

(a) 数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を

$$b_n = a_{n+1} - a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$c_n = a_{n+1} - 4a_n\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 b_n，c_n を求めよ。

(b) 一般項 a_n を求めよ。

(3) $r = 4$ の場合に，次の (c), (d) に答えよ。

(c) 数列$\{d_n\}$を

$$d_n = \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定めるとき，一般項 d_n を求めよ。

(d) 一般項 a_n を求めよ。

4 次の各問いに答えよ。

(1) θを媒介変数として，

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

で表される曲線の$\theta = \dfrac{\pi}{2}$に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(2) 2つの曲線$y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$の交点の座標を求めよ。ただし，eは自然対数の底とする。

(3) (2) の2曲線とy軸で囲まれた図形をDとする。Dの面積を求めよ。

(4) (3) で与えられたDをx軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

5 次の4問のうちから1問を選択して解答せよ。解答する問題の番号を解答用紙の所定の欄に記入すること。

5—1 次の各問いに答えよ。

(1) 座標平面上での原点を中心とする150°の回転移動を表す行列をPとする。点$(x,\ y)$がPの表す移動によって，点$(2,4)$に移ったとする。このとき，点$(x,\ y)$を求めよ。

(2) (1)で与えられた行列Pを考える。$P^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$を満たす最小の自然数$n$を求めよ。

(3) 以下の各命題の反例をあげよ。また，反例になっていることを示せ。ただし，$X,\ Y$は2次の正方行列とする。

(a) $XY=YX$が成立する。

(b) $XY=O$ならば，$X=O$または$Y=O$である。ただし，Oは2次の零行列を表す。

(c) Aを逆行列A^{-1}をもつ2次の正方行列とする。このとき，$AX=Y$ならば，$X=YA^{-1}$である。

5—2 cとdを0ではない実数とする。CとDをそれぞれsとtを媒介変数として

$$C:\begin{cases}x=\dfrac{c}{s^2+c^2}\\ y=\dfrac{s}{s^2+c^2}\end{cases}\qquad D:\begin{cases}x=\dfrac{t}{t^2+d^2}\\ y=\dfrac{d}{t^2+d^2}\end{cases}$$

で与えられる曲線とする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) CとDは円から1点を除いた曲線になっている。それぞれの円を表す方程式と除かれる点を求めよ。

(2) CとDの交点の座標を求めよ。

(3) CとDの交点におけるCの接線の方程式を求めよ。

5 — 3　２つの確率変数X，Yの確率分布を同時に考えた表(同時確率分布表)が以下のように与えられている。ただし，X，Yは互いに独立であり，$0 < a < 1$，$0 < b < 1$とする。このとき，次の各問いに答えよ。

X ＼ Y	2	4	計
1			a
2			
計	b		1

(1)　表を完成させ，完成させた表を解答用紙に書け。

(2)　確率変数$W = X - Y$の平均$E(W)$を求めよ。

(3)　確率変数$Z = \dfrac{Y}{X}$の確率分布表を作成し，Zの平均$E(Z)$を求めよ。

(4)　$E(Z) = \dfrac{9}{4}$，$E(W) = -\dfrac{3}{2}$となる場合に，Zの分散$V(Z)$を求めよ。

5 — 4　次の各問いに答えよ。

(1)　数字１が書かれた玉a個($a \geqq 1$)と，数字２が書かれた玉１個がある。これら$a + 1$個の玉を母集団として，玉に書かれている数字を変量とする。このとき，この母集団から復元抽出によって大きさ３の無作為標本を抽出し，その玉の数字を取り出した順にX_1，X_2，X_3とする。標本平均$\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$の平均$E(\overline{X})$が$\dfrac{3}{2}$であるとき，$\overline{X}$の確率分布とその分散$V(\overline{X})$を求めよ。ただし，復元抽出とは，母集団の中から標本を抽出するのに，毎回もとに戻してから次のものを１個取り出す抽出法である。

(2)　ある企業の入社試験は採用枠300名のところ500名の応募があった。試験の結果は500点満点の試験に対し，平均点245点，標準偏差50点であった。得点の分布が正規分布であるとみなされるとき，合格最低点はおよそ何点であるか。小数点以下を切り上げて答えよ。ただし，確率変数Zが標準正規分布に従うとき，$P(Z > 0.25) = 0.4$，$P(Z > 0.5) = 0.3$，$P(Z > 0.54) = 0.2$とする。