数　　学

平成 26 年度

入学試験問題

受験番号	

1. 注意事項

（1） 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

（2） この問題冊子は 14 ページあります。

試験中に，問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は，手を挙げて，監督者に知らせなさい。

（3） 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。

（4） 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。

（5） 解答用紙には，氏名，受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があるので，それぞれ正しく記入し，マークしなさい。

（6） **計算機能をもつ時計，計算器具などの使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。**

（7） 試験終了後，解答用紙はもちろん，問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解答上の注意

解答上の注意は，裏表紙にも記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，問題冊子を開いてはいけません。またマークシート左下に記載してある「注意事項」も読んでおきなさい。

（1） 問題は $\boxed{1}$ ， $\boxed{2}$ ， $\boxed{3}$ の 3 問あります。

（2） 各問題文中の $\boxed{ア}$ ， $\boxed{イウ}$ などの $\boxed{}$ には，数値または符号（＋，－）が入ります。これらを次の方法で，解答用紙の指定欄に，解答しなさい。

裏表紙につづく

解答を始めるまえに，つぎの**解答上の注意のつづき**を読みなさい。

解答上の注意のつづき

（i） **分数の形の解答枠に，整数の解答をしたいときは，分母が 1 の分数の形になるように答えなさい。**たとえば，$\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，$\dfrac{2}{1}$ と答えなさい。

（ii） 解答枠 $\boxed{}$ に，**解答枠のけた数より少ないけた数の整数を解答したいときは，数字が右づめで，その前を 0 でうめるような形で答えなさい。**たとえば，$\boxed{\text{ヨワ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは，0 2 と答えなさい。**ヨの 0 をマークしないままにしておくと，間違いになります！**

（解答上の注意終）

$\boxed{1}$ a を正の定数として，AB ＝ CD ＝ 1，BC ＝ DA ＝ a である長方形 ABCD がある。また，点 P は辺 AB 上に，点 Q は辺 BC 上に，点 R は辺 DA 上にあり，三角形 PQR は正三角形であるとする。$\angle\mathrm{PRA} = \theta$ とし，正三角形 PQR の一辺の長さを l とする。

（1） $\theta + \angle\mathrm{PQB} = \boxed{\text{アイ}}^{\circ}$ である。

（2） $l = \dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\sin\theta + \sqrt{\boxed{\text{エ}}}\cos\theta}$ である。

（3） $\mathrm{AR} = \dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}} + \tan\theta}$ である。

(4)　$a=1$ とする。このとき，θ の取り得る値の範囲は

$$\boxed{\text{キク}}^\circ \leqq \theta \leqq \boxed{\text{ケコ}}^\circ$$

である。

$\theta = \boxed{\text{サシ}}^\circ$ のとき l は最小となり最小値 $\boxed{\text{ス}}$ をとる。また，$\theta = \boxed{\text{セソ}}^\circ$ または $\theta = \boxed{\text{タチ}}^\circ$ のとき，l は最大となり最大値 $\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \sqrt{\boxed{\text{テ}}}$ をとる。ここで，$\boxed{\text{セソ}} < \boxed{\text{タチ}}$ である。

(5)　$a=2$ とする。このとき，θ の取り得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ト}}^\circ \leqq \theta \leqq \boxed{\text{ナニ}}^\circ$$

である。

正三角形 PQR の面積を S とする。$\theta = \boxed{\text{ヌネ}}^\circ$ のとき S は最小となり最小値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ノ}}}}{\boxed{\text{ハ}}}$ をとる。また，$\theta = \boxed{\text{ヒ}}^\circ$ または $\theta = \boxed{\text{フヘ}}^\circ$ のとき S は最大となり最大値 $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ホ}}}}{\boxed{\text{マ}}}$ をとる。ここで，$\boxed{\text{ヒ}} < \boxed{\text{フヘ}}$ である。

2 四面体 OABC において

$$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{OB}|=2,\quad |\overrightarrow{OC}|=4,$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{6},\quad \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=2$$

とする。

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\boxed{\text{ア}}$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{イ}}$,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\boxed{\text{ウ}}+\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=\boxed{\text{オ}}-\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$,

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2) $\angle AOB=\boxed{\text{クケ}}^\circ$, $\angle BOC=\boxed{\text{コサ}}^\circ$, $\angle ABC=\boxed{\text{シス}}^\circ$,

$\angle OBC=\boxed{\text{セソ}}^\circ$ である。

(3) 線分 OB 上に点 P をとり,

$$\overrightarrow{OP}=t\cdot\overrightarrow{OB}\quad (0<t<1)$$

とする。$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PC}|$ が最小になるのは

$$t=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツ}}}+\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{トナ}}}\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}$$

のときである。また, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ が最小になるのは

$$t=\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

のときである。

計　算　用　紙

3 a を実数とし，座標平面上の4点 $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(a+1,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C}\left(a+1,\ \frac{3}{2}\right)$，$\mathrm{D}\left(a,\ \frac{3}{2}\right)$ を頂点とする正方形 ABCD を考える。正方形 ABCD の内部のうち，$y \leqq e^x$ の範囲の面積を $S(a)$ とする。ただし，e は自然対数の底で，$e = 2.718\cdots$ である。

(1) $y = e^x$ のグラフが辺 AB と辺 BC の両方と共有点をもつような a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{ア}} - \log\boxed{\text{イ}} \leqq a \leqq -\log\boxed{\text{ウ}}$$

であり，この範囲における $S(a)$ の最大値を M_1 とするとき，

$$M_1 = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}e - \boxed{\text{カ}}$$

である。

(2) $y = e^x$ のグラフが辺 BC と辺 DA の両方と共有点をもつような a の値の範囲は

$$-\log\boxed{\text{キ}} \leqq a \leqq -\boxed{\text{ク}} - \log\boxed{\text{ケ}} + \log\boxed{\text{コ}}$$

であり，この範囲における $S(a)$ の最大値を M_2 とするとき，

$$M_2 = \boxed{\text{サ}} - \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}e^{-1}$$

である。

(3) $y = e^x$ のグラフが辺 CD と辺 DA の両方と共有点をもつような a の値の範囲は

$$-\boxed{\text{セ}} - \log\boxed{\text{ソ}} + \log\boxed{\text{タ}} \leqq a \leqq -\log\boxed{\text{チ}} + \log\boxed{\text{ツ}}$$

である。

(4)　(1)で求めた M_1，(2)で求めた M_2 および，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ の4つの値のうち，最も小さい値は $\boxed{テ}$ であり，最も大きい値は $\boxed{ト}$ である。ここで，$\boxed{テ}$ と $\boxed{ト}$ は，M_1，M_2，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ のいずれかであり，

M_1 が入る場合は解答欄の ① を，
M_2 が入る場合は解答欄の ② を，
$\frac{1}{3}$ が入る場合は解答欄の ③ を，
$\frac{1}{2}$ が入る場合は解答欄の ④ を

マークしなさい。

(5)　$S(a)=\frac{2}{5}$ のとき

$$a=\log \boxed{ナ} - \log \boxed{ニヌ} - \log\left(e - \boxed{ネ}\right)$$

である。