平成26年度　入学試験問題

数　　学

注意事項

試験開始後，問題冊子及び答案用紙のページを確かめ，落丁，乱丁あるいは印刷が不鮮明なものがあれば新しいものと交換するので挙手すること。

1. 試験開始の合図があるまで問題冊子を開かないこと。
2. 各志願者は，下の表に指示した問題を解答すること。
3. 解答は，必ず問題と同じ番号の答案用紙のおもて面に記入すること。
4. 解答は明瞭に書くこと。
5. 答案用紙は持ち出さないこと。

志望学部	問題の番号			
教育学部	4	5	6	7
経済学部	1	2		
医学部	4	5	6	8
歯学部	3	5	6	7
薬学部	4	5	6	7
工学部	3	5	6	7
環境科学部	1	2		
水産学部	1	2		

1 p を正の定数として，放物線 $C: y=(x-p)^2+p^2$ を考える。C の 2 本の接線 l，m を考え，接点の x 座標を，それぞれ a，b とする。ただし，$a<0$，$b>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) l と m の方程式を求めよ。

(2) l，m が原点を通るとき，a，b を p を用いて表せ。

(3) l，m が原点を通るとき，放物線 C と 2 本の接線 l および m によって囲まれた図形の面積を S とする。S を p を用いて表せ。

（下書き用紙）

2 $\triangle$ABC において，AB $=5$，BC $=7$，CA $=6$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC の内心を I とする。$\angle$A の 2 等分線と $\angle$B の 2 等分線は点 I で交わる。$\angle$B の 2 等分線と辺 AC の交点を D とするとき，AD : DC と BI : ID を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\angle \mathrm{A}=\theta$ とする。$\cos\theta$ と内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ。

(4) 実数 x，y を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\vec{b}+y\vec{c}$ と表される点 P を考える。点 P が辺 AB の垂直 2 等分線上にあるとき，x と y が満たす関係式を求めよ。

(5) $\triangle$ABC の外心を O とする。辺 AB の垂直 2 等分線と辺 AC の垂直 2 等分線は点 O で交わる。$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

（下書き用紙）

3 次の問いに答えよ。

(1) 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ると余りが $2x-1$，$(x-2)(x-3)$ で割ると余りが $x+7$ であった。$P(x)$ を $(x+2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，

$$\cos 3\theta + 2\cos\theta = 0$$

を満たす θ の値をすべて求めよ。

(3) 不等式

$$2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9 < 0$$

を満たす x の範囲を求めよ。

（下書き用紙）

4 k を実数とし，円 $x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=k$ が異なる 2 点で交わるものとする。その 2 つの交点を P，Q とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。

(2) 2 点 P，Q を通る円の中心は直線 $y=2x$ 上にあることを示せ。

(3) 上の (2) の円の中心を $(a, 2a)$，半径を r とする。r^2 を a と k で表せ。

(4) 点 R の座標を $(2, 1)$ とする。k の値が (1) で求めた範囲を動くとき，3 点 P，Q，R を通る円の中心の x 座標の範囲を求めよ。

（下書き用紙）

5 1 から $2n$ までの偶数の平方の和を a_n，奇数の平方の和を b_n とする。すなわち

$$a_n = 2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2, \qquad b_n = 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2$$

である。なお，1 から n までの自然数の平方の和については

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

が成り立つ。次の問いに答えよ。

(1) 偶数の平方の和 $2^2 + 4^2 + \cdots + 20^2$ と奇数の平方の和 $1^2 + 3^2 + \cdots + 19^2$ を求めよ。

(2) a_n と b_n を求めよ。

(3) $\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ および $\dfrac{1}{b_n} + \dfrac{3}{2n(2n+1)}$ を計算せよ。

(4) $c_n = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n}$ とするとき，$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ を求めよ。

（下書き用紙）

6 曲線 $C : y = \log x$ 上の点 $\mathrm{P}(t, \log t)$ における接線を l とする。ただし，$1 < t < e$ とする。e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。

(2) 接線 l と y 軸との交点を Q とし，接線 l と x 軸との交点を R とする。Q と R の座標を求めよ。

(3) 接線 l と x 軸および y 軸によって囲まれた図形を D_1，接線 l と曲線 C および x 軸によって囲まれた図形を D_2 とする。D_1 の面積 $S_1(t)$ と D_2 の面積 $S_2(t)$ を求めよ。

(4) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とおく。このとき $S(t)$ の増減を調べ，その最小値およびそのときの t の値を求めよ。

（下書き用紙）

$\boxed{7}$ 次の問いに答えよ。

(1) $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan x = t$ とおく。$\cos 2x$ と $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ。

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{2 - \cos 2x}\,dx$ を求めよ。

(3) 関数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の逆関数を求めよ。

(4) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ とおくことにより，$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めよ。

（下書き用紙）

8 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，関数 $f(x)$ と 関数 $g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos x$$
$$g(x) = \cos\frac{x}{2} + c$$

と定義する。c は定数である。次の問いに答えよ。

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が $x = 0$ 以外の点で接するように c の値を定め，接点 (p, q) を求めよ。また，そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ と 関数 $g(x)$ の大小関係を調べよ。

(2) 定数 c と接点 (p, q) は (1) で求めたものとする。そのとき，区間 $0 \leqq x \leqq p$ において，y 軸および 2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ によって囲まれた図形を D とする。D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

（下書き用紙）