B

平 成 26 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に右詰めで正確に記入すること．**
3. 問題本文は，3ページと，5ページと，7ページと，9ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．
4. 解答用冊子には表紙1枚と解答用紙5枚と白紙2枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．
5. 解答(途中の計算，推論等を含む)は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．**指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない．
8. 問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること．

(下 書 き 用 紙)

(下書き用紙)

$\boxed{1}$ 実数 a, b, c, d, e に対して，座標平面上の点 A(a, b)，B(c, d)，C$(e, 0)$ をとる．ただし点 A と点 B はどちらも原点 O$(0, 0)$ とは異なる点とする．このとき，実数 s, t で

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

を満たすものが存在するための，a, b, c, d, e についての必要十分条件を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{2}$　$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件 (ア)(イ) を満たす.

(ア) $t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$$

が成り立つ.

(イ) $t>0$ に対して，等式

$$t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$$

を満たす実数 x が存在する.

このとき，$f(t)$ を求めよ.

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$　$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ.

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

4 半径1の2つの球 S_1 と S_2 が1点で接している．互いに重なる部分のない等しい半径を持つ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 $T_1, T_2, \cdots, T_n$ があり，次の条件 (ア)(イ) を満たす．

(ア) T_i は S_1, S_2 にそれぞれ1点で接している $(i = 1, 2, \cdots, n)$.

(イ) T_i は T_{i+1} に1点で接しており $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$，そして T_n は T_1 に1点で接している．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $T_1, T_2, \cdots, T_n$ の共通の半径 r_n を求めよ．

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，$T_1, T_2, \cdots, T_n$ の体積の和を W_n とするとき，極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{W_n}{V_n}$$

を求めよ．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{5}$　さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする．n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す．T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2, 3, 4 のいずれかである確率を q_n とする．

(1) $p_n + q_n$ を求めよ．

(2) p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ．

(3) $r_n = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ．

（配点率 20 %）