平成26年度入学試験問題（前期日程）

数学甲（数I・数II・数III・数A・数B・数C）

この冊子には，問題として $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$ が出題されている。
全問解答すること。

受験番号

最後のページの受験番号欄にも受験番号を記入すること。

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ。(50点)

問 1　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$ を求めよ。

問 2　$AB = AC = 1$ である二等辺三角形ABCにおいて，$BC = 2x$，内接円の半径を r とおく。

(1)　r を x を用いて表せ。

(2)　r が最大となる x の値を求めよ(最大値そのものは求める必要はない)。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2(1)	
問 2(2)	
小計	

1 解答欄

問 1

問 2 (1)

問 2 (2)

2 a, b, c, d は $a+d=0$, $ad-bc=1$ をみたす実数とし, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。次の問いに答えよ。

(50 点)

問 1 $A^2=-E$ を示せ。

問 2 p, q は実数で $p^2+q^2 \neq 0$ をみたすとする。実数 x, y に対して $(pA+qE)(xA+yE)=E$ が成り立つとき, x, y を p, q で表せ。

問 3 θ を実数とする。すべての正の整数 n に対して

$$\{(\cos\theta)E+(\sin\theta)A\}^n=(\cos n\theta)E+(\sin n\theta)A$$

が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて証明せよ。ここで, $(\sin\theta)A$ は行列 A の $\sin\theta$ 倍を表す。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
小計	

2 解答欄

問 1

問 2

問 3

3 整数 m，n は $m \geqq 1$，$n \geqq 2$ をみたすとする。次の問いに答えよ。(50 点)

問 1 $x > 0$ のとき，$y = \log x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ。答を記すのみでよい。

問 2 座標平面上の 3 点 $A(m,\ \log m)$，$B(m+1,\ \log m)$，$C(m+1,\ \log(m+1))$ を頂点とする三角形の面積を S_m とする。S_m を m を用いて表せ。答を記すのみでよい。

問 3 $f(m) = \log m + S_m - \displaystyle\int_m^{m+1} \log x\,dx$ とおく。$f(m) < 0$ が成り立つことを，$y = \log x$ のグラフを用いて説明せよ。

問 4 $f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) < 0$ であることを用いて，不等式

$$\log 1 + \log 2 + \cdots + \log(n-1) < n\log n - n + 1 - \frac{1}{2}\log n$$

を証明せよ。

問 5 不等式 $n! < e\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

（解答は次のページの解答欄に記入すること）

採　点　欄	
問 1	
問 2	
問 3	
問 4	
問 5	
小計	

3 解答欄

問 1

問 2

問 3

問 4

問 5

4 1個のさいころを繰り返し投げて景品を当てるゲームを行う。景品はAとBの2種類あり，次の規則にしたがって景品をもらえるとする。

・出た目の数が6のときは，景品Aをもらえる。

・出た目の数が4，5のときは，景品Bをもらえる。

・出た目の数が1，2，3のときは，景品はもらえない。

・景品Aと景品Bの2種類とももらうことができたらゲームは終了する。

ちょうどn回さいころを投げ終わったところでゲームが終了する確率をp_nとする。次の問いに答えよ。(50点)

問1 p_2の値を求めよ。

問2 nを2以上の整数とする。p_nをnを用いて表せ。

問3 nを2以上の整数とする。不等式

$$p_{n+1}-p_n<\frac{2}{3}(p_n-p_{n-1})$$

を示せ。ただし，$p_1=0$とする。

(解答は次のページの解答欄に記入すること)

採点欄	
問1	
問2	
問3	
小計	

4 解答欄

問 1

問 2

問 3

採　点　欄	
数　　学 甲	
1	
2	
3	
4	
合計	

受 験 番 号