平成２６年度入試

個別学力試験問題（前期日程）

数　　　　学

（医学部医学科）

注　意

1. 問題紙は指示があるまで開いてはいけません。
2. 問題紙は2ページ，解答用紙は4枚です。指示があってから確認し，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
3. 答えはすべて解答用紙の所定のところに記入してください。
4. 解答用紙の裏面は使わないでください。
5. 各問題とも必ず解答の過程を書き，結論を明示してください。小問に分けられているときは，小問の結論を明示してください。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 試験終了後，問題紙は持ち帰ってください。

$\boxed{1}$ 3つの箱 X, Y, Z と3つの玉 a, b, c があり，1つの箱には1つの玉が入るとする。箱 X には a が，箱 Y には b が，箱 Z には c が入っている状態から始めて，次の操作を繰り返し行う。

「数字 $1, 2, 3, 4, 5$ の中から無作為に1つの数字 m を選ぶ。$m = 1$ ならば，箱 Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, Y に移す。$m = 2$ ならば，箱 X, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X に移す。$m = 3$ ならば，箱 X, Y にある玉をそれぞれ箱 Y, X に移す。$m = 4$ ならば，箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Y, Z, X に移す。$m = 5$ ならば，箱 X, Y, Z にある玉をそれぞれ箱 Z, X, Y に移す。」

この操作を n 回繰り返したあとに3つの玉が最初の状態に戻っている確率を p_n とする。箱 X, Y, Z にそれぞれ玉 x, y, z が入っている状態を (x, y, z) と表す。たとえば，最初の状態は (a, b, c) である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 1回目の操作を行ったあとの起こりうる状態をすべて挙げ，p_1, p_2 を求めよ。

(2) n 回目の操作を行ったあとの状態が最初の状態 (a, b, c) となっていない確率を q_n とする。$n \geqq 1$ のとき，$p_{n+1} = \dfrac{1}{5}q_n$ が成り立つことを示せ。

(3) p_n を求めよ。

$\boxed{2}$ a, b, c, n を自然数とし，$a \leqq b \leqq c$ かつ $n(a + b + c) = abc$ をみたすとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a = b = c$ のとき，n は3の倍数であることを示せ。

(2) $n = 3$ のとき，自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

3 $f(x)=\dfrac{8x}{\sqrt{x^2+1}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ の凹凸と漸近線を調べて，そのグラフの概形をかけ。

(2) k を正の定数とする。関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ がちょうど 2 個の共有点をもつとき，k の値を求めよ。

(3) k を (2) で求めた定数とする。このとき，$x \geqq 0$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+k$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく。x を実数とし，行列

$$X=\begin{pmatrix} 3x-1 & 2x-1 \\ -3x+2 & -2x+2 \end{pmatrix}$$

を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して X の n 乗を $X^n=\begin{pmatrix} P_n(x) & Q_n(x) \\ R_n(x) & S_n(x) \end{pmatrix}$ とおく。このとき，すべての n に対して，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$Q_n(x)=0$ であることを示せ。また，すべての n に対して，$x=\dfrac{2}{3}$ のとき，$R_n(x)=0$ であることを示せ。

(2) a と b は定数とする。このとき，$X^2+aX+bE=O$ をみたす実数 x が存在するための a, b の条件を求めよ。

(3) $X^3=O$ をみたす実数 x は存在しないことを証明せよ。