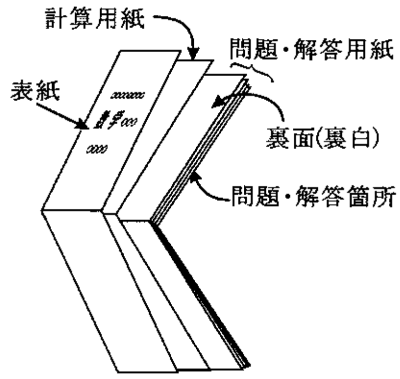
平成26年度入学試験問題

数　学　　202

（前　期　日　程）

（注意事項）



1 問題・解答用紙および計算用紙は，係員の指示があるまで開かないこと。

2 この表紙を除いて，**問題・解答用紙は４枚**，**計算用紙は１枚**である。
用紙の折り方は図のようになっているので注意すること。

3 **解答は，問題と同一の紙面の指定された解答箇所に書くこと。**指定された解答箇所以外に書いたものは採点しない。また，**裏面に解答したものも採点しない。**

4 **解答開始後，各問題・解答用紙の「受験番号」欄に受験番号をはっきり記入すること。**

5 計算用紙以外にも，表紙や問題・解答用紙の裏面を計算のために用いてよい。

6 表紙，計算用紙を含め，配布した用紙はすべて回収する。

受験番号	第　　　　　　番

数　学　202　その1

第1問　$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とし，行列 A で表される1次変換を f とする。f によって点 $\mathrm{P}(0,1)$ が点 $\mathrm{P}_1(x_1, y_1)$ に移されるとする。さらに，$n=1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_n(x_n, y_n)$ が f によって点 $\mathrm{P}_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ に移されるとする。

(1)　すべての自然数 n について，点 P_n は直線 $x+y=1$ 上にあることを証明せよ。

(2)　x_{n+1} を x_n の式で表せ。さらに，数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　n を限りなく大きくするとき，点 P_n が近づいていく点の座標を求めよ。

[第1問の解答箇所]

小 計	点

受験番号	第　　　　　番

数　学　202　その２

第２問　$0<a<1$ とする。曲線 $y=|x|x$ を C_1 とし，曲線 $y=ax^2+x-a$ を C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 の共有点のうち，第３象限にある共有点の座標を求めよ。

(2) C_1 と C_2 の共有点が２個であるとき，a の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値をとるとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

［第２問の解答箇所］

小 計	点

受験番号	第　　　　　番

数　学　202　その３

第３問　n 枚のカードに 1 から n までの自然数がひとつずつ書かれている。異なるカードには異なる数が書かれている。これら n 枚のカードを横一列に並べて，左端から i 番目 $(1 \leqq i \leqq n)$ のカードに書かれた数を a_i とする。

(1)　$n=5$ のとき，$a_1 < a_2 < a_3$ かつ $a_3 > a_4 > a_5$ を満たすカードの並べ方の総数を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。次の条件 (i), (ii) を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ。ただし，(ii) では，$k=2$ のとき $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ は $a_1 < a_2$ を表し，$k=n-1$ のとき $a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$ は $a_{n-1} > a_n$ を表す。

(i)　$1 < k < n$　　　　(ii)　$a_1 < a_2 < \cdots < a_k$　かつ　$a_k > a_{k+1} > \cdots > a_n$

(3)　$n \geqq 4$ とする。次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすカードの並べ方の総数を n の式で表せ。ただし，(iii) のそれぞれの不等式は (2) と同様に，$p=2$ のとき $a_1 > a_2$ を表し，$q=p+1$ のとき $a_p < a_{p+1}$ を表し，$q=n-1$ のとき $a_{n-1} > a_n$ を表す。

(i)　$1 < p < q < n$　　　　(ii)　$a_1 = n$　かつ　$a_p = 1$

(iii)　$a_1 > a_2 > \cdots > a_p$　かつ　$a_p < a_{p+1} < \cdots < a_q$　かつ　$a_q > a_{q+1} > \cdots > a_n$

[第３問の解答箇所]

小 計	点

受験番号	第　　　　　　　番

数　学　202　その4

第4問　p を素数とする。初項，公差がともに $5p$ の等差数列を $\{a_n\}$ とする。数列 $\{b_n\}$ は公差が p の等差数列で $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} a_n = a_1 + a_p + 5\sum_{n=1}^{p} b_n$ を満たす。

(1)　b_1 を求めよ。

(2)　$p=2$ のとき，$\dfrac{a_n}{b_n}$ の値が自然数となるような n をすべて求めよ。

(3)　$p \geqq 3$ とする。$\dfrac{a_n}{b_n}$ の値が自然数となるような p と n の組 (p, n) をすべて求めよ。

［第4問の解答箇所］

小 計	点