A，B，BR，C，D

平成27年度個別学力検査問題
(国際資源学部，教育文化学部，医学部，理工学部)

数　学

前　期　日　程

注　意　事　項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，4ページあり，問題は(1)から(7)まで7題あります。解答用紙は3枚あります。計算用紙(白紙)は1枚あります。

　試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの乱丁・落丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　受験する学部によりそれぞれ3題出題されます。国際資源学部は(2)，(3)，(4)，教育文化学部(理数教育コースを除く)は(1)，(2)，(3)，教育文化学部(理数教育コース)は(1)，(3)，(4)，医学部は(5)，(6)，(7)，理工学部は(1)，(3)，(4)にそれぞれ解答しなさい。

4　監督者の指示に従って，解答用紙に受験番号を記入しなさい。

5　1枚の解答用紙に1つの問題を解答しなさい。また，解答用紙の指定された(　)内に解答する問題の番号を記入しなさい。解答用紙の表面に解答を記入しきれない場合は，その裏に記入してもよい。その場合，解答用紙の右下に「裏に記入」と明記しなさい。ただし，解答用紙の裏の上部(破線の上の部分)には解答を記入してはいけません。

6　配付された解答用紙は，持ち帰ってはいけません。

7　試験終了後，問題冊子および計算用紙は持ち帰りなさい。

(1) 3個のさいころを同時に投げるとする。次の問いに答えよ。

(i) 出る目の和が5になる確率を求めよ。

(ii) 出る目の和が10になる確率を求めよ。

(iii) 出る目の和が5の倍数になる確率を求めよ。

(2) 次の問いに答えよ。

(i) 次の数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

$$4,\ 11,\ 24,\ 43,\ 68,\ 99,\ \cdots\cdots$$

(ii) 次の方程式を解け。

① $\log_2 x = \log_4 5$

② $\log_2 x^2 = 5$

(iii) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x + 41$とする。$-8 \leqq x \leqq 8$における関数$y = f(x)$の最大値と最小値を求めよ。

(3) 連立不等式$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x + y \leqq 8$，$x + 3y \leqq 9$が表す領域をAとする。次の問いに答えよ。

(i) 直線$3x + y = 8$と直線$x + 3y = 9$の交点の座標を求めよ。また，領域Aを図示し，その面積を求めよ。

(ii) 領域Aにおいて，$\dfrac{3}{4}x + y$の最大値と最小値を求めよ。また，そのときのx，yの値を求めよ。

(iii) 不等式$y \geqq \dfrac{8}{3}x^2$が表す領域と領域Aの共通部分を領域Bとする。領域Bの面積を求めよ。

(iv) 不等式$y \leqq ax$が表す領域と領域Aの共通部分を領域Cとする。領域Cの面積が領域Bの面積と等しくなる実数aの値を求めよ。

(4) $f(x) = |1 + 2\sin 2x|$とする。次の問いに答えよ。

(i) $0 \leqq x \leqq \pi$のとき，方程式$f(x) = 0$を解け。

(ii) $0 \leqq x \leqq \pi$における関数$y = f(x)$のグラフの概形をかけ。

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$を求めよ。

(iv) $\displaystyle\int_{\frac{11}{12}\pi}^{x} f(t)\,dt = 3\pi + 18\sqrt{3}$となる$x$の値を求めよ。

(5) 次の問いに答えよ。

(i) $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

(ii) 整数 a, b, c に対して，$a+b+c$ と abc が 3 の倍数のとき，$a^3+b^3+c^3$ は 9 の倍数であることを示せ。

(iii) 実数 a, b, c が $a+b+c=6$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$ を満たすとき，$a^3+b^3+c^3+3abc$ の値を求めよ。

(6) 四面体 OABC において，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=\theta$ とする。点 D を BC の中点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。次の問いに答えよ。

(i) 点 P を AD 上の点とし，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:(1-t)$ とするとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表せ。

(ii) 点 P を AD 上の動点とする。OP の長さが最小となるとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表せ。

(iii) 点 Q を以下の①〜③を満たすように定める。このとき $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，θ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を表せ。

① 四面体 OABC の体積と四面体 QABC の体積は等しい

② $\mathrm{QA}=\mathrm{QB}=\mathrm{QC}$

③ 線分 OQ は 3 点 A，B，C が定める平面と交点をもたない

（7） $F(x)$，$f(x)$，$g(x)$は関数である。次の問いに答えよ。

(i)　$0 < a \leqq \pi$とし，$F(x) = \displaystyle\int_a^x \cos(t-a)g(\sin(t-a))\,dt - f(x)$とする。

① $f(x)$は$(1-x)\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x\int_x^1 f(t)\,dt$と$f(1) = 1$を満たすとする。$f(x)$を求めよ。

② $f(x)$は①で求めた関数である。$g(x)$は，$x < y$ならば$g(x) > g(y)$を満たし，$g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$であるとする。このとき，開区間$(a,\ 2a)$で$F(x)$が極大値をただ1つもつように，$a$の値の範囲を定めよ。

(ii)　$a \geqq 0$とし，$F(x) = \displaystyle\int_a^{x+a} \cos(t-a)g(\sin(t-a))\,dt - f(x)$とする。$f(x) > 0$，$f'(x) > 0$であり，$g(x) = xf(x)$であるとする。$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$のとき$F(x) \leqq 0$となることを示せ。