

数 学

平成 27 年 度

入 学 試 験 問 題

受 験 番 号	
---------	--

1. 注 意 事 項

- (1) 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
- (2) この問題冊子は 14 ページあります。
試験中に、問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気づいた場合は、手を挙げて、監督者に知らせなさい。
- (3) 問題冊子のどのページも切り離してはいけません。
- (4) 問題冊子の表紙の受験番号欄に受験番号を記入しなさい。
- (5) 解答用紙には、氏名、受験番号の記入欄および受験番号のマーク欄があるので、それぞれ正しく記入し、マークしなさい。
- (6) 計算機能をもつ時計、計算器具などの使用は禁止します。使用している場合は不正行為とみなします。
- (7) 試験終了後、解答用紙はもちろん、問題冊子も持ち帰ってはいけません。

2. 解 答 上 の 注 意

解答上の注意は、裏表紙にも記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、問題冊子を開いてはいけません。またマークシート左下に記載してある「注意事項」も読んでおきなさい。

- (1) 問題は , , の 3 問あります。
- (2) 各問題文中の , などの には、数値または符号 (+ , -) が入ります。これらを次の方法で、解答用紙の指定欄に、解答しなさい。

裏表紙につづく

解答上の注意(つづき)

- (i) ア, イ, ウ, …… の1つ1つは, それぞれ, 0 から 9 までの数字, または, +, - のいずれか 1つに対応します。それらを, ア, イ, ウ, …… で示された解答欄にマークしなさい。

〔例1〕

ア

イ	ウ
---	---

 に -30 と答えたいときは,

ア	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	+	-	0	1	2	●	4	5	6	7	8	9
ウ	+	-	●	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- (ii) 分数の形の解答が求められているときは, 既約分数で, 分母が正の数になる形で答えなさい。

〔例2〕

エ

オ

 /

カ

 に $-\frac{5}{6}$ と答えたいときは,

エ	+	●	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	+	-	0	1	2	3	4	●	6	7	8	9
カ	+	-	0	1	2	3	4	5	●	7	8	9

問題訂正

p. 2

1 (4)

訂正前の下線部分を、訂正後の下線部分のように訂正します。

訂正前

a, b を共に正の整数とし、グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わり、

$$b^2 < \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} a \boxed{\text{ト}}$$

が成り立つ。

訂正後

a, b を共に正の整数とするとき、グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わるための必要十分条件は

$$b^2 < \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} a \boxed{\text{ト}}$$

である。

解答を始めるまえに、つぎの解答上の注意(つづき)を読みなさい。

解答上の注意(つづき)

(i) 分数の形の解答枠に、整数の解答をしたいときは、分母が 1 の分数の

形になるように答えなさい。たとえば、 $\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、 $\frac{2}{1}$ と答えなさい。

(ii) 解答枠 $\boxed{\quad}$ に、解答枠のけた数より少ないけた数の整数を解答したいときは、数字が右づめで、その前を 0 でうめるような形で答えなさい。たとえば、 $\boxed{\text{ヨワ}}$ の解答枠に 2 と答えたいときは、02 と答えなさい。ヨの 0 をマークしないままにしておくと、間違いになります！

(解答上の注意終)

1 a, b を実数とする。 x の整式 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3ax^2 + 3(a+b)x - 3b$$

とし、 $y = f(x)$ のグラフを G とする。

(1) a, b の値にかかわらず、グラフ G は点 $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を通る。

(2) 整式 $f(x)$ を因数分解すると

$$f(x) = (x - \boxed{\text{ウ}})(x^3 - \boxed{\text{エ}}ax + \boxed{\text{オ}}b)$$

となる。

(3) $a = 4$ とし、整式 $f(x)$ は $(x - c)^2$ で割り切れるとする。このとき、

$$c = - \boxed{\text{カ}} \text{ のとき, } b = - \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \text{ であり,}$$

$$c = \boxed{\text{コ}} \text{ のとき, } b = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}} \text{ である。また,}$$

$$c = \boxed{\text{セ}} \text{ のとき, } b = \frac{\boxed{\text{ソタ}}}{\boxed{\text{チ}}} \text{ である。}$$

ただし、 $\boxed{\text{コ}} < \boxed{\text{セ}}$ とする。

(4) a, b を共に正の整数とし、グラフ G が x 軸と異なる 4 点で交わる
とき、

$$b^2 < \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} a \boxed{\text{ト}}$$

が成り立つ。

(5) 2 つのサイコロを投げて出る目の数をそれぞれ、 a, b とするとき、グラ
フ G が x 軸と異なる 4 点で交わる確率は

$$\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$$

である。

2 座標平面上の 2 つの直線 l, m を

$$l: y = \frac{4}{3}x + 4$$

$$m: y = -\frac{3}{4}x + 9$$

とする。 l と m の交点を A とし、直線 l と x 軸の交点を B とする。原点を O とし、 $\angle ABO$ の 2 等分線を k とする。2 つの直線 k と m の交点を C とする。三角形 ABC の外接円と x 軸との交点のうち、 B と異なる点を D とする。線分 BC と線分 AD の交点を E とする。直線 m と x 軸の交点を F とする。

(1) 直線 k の方程式は

$$y = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}x + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$$

である。

$$(2) AB = \boxed{\text{オカ}}, \quad BC = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \sqrt{\boxed{\text{コ}}}, \quad CA = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$$

である。

$$\text{また、三角形 } ABC \text{ の外接円の中心の座標は } \left(\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}, \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}} \right)$$

である。

(3) $\angle BCD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$ とすると,

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \quad \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}$$

である。

(4) $\frac{BE}{CE} = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(5) $\angle AFE = \theta$ とすると,

$$\tan \theta = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

である。

3 e を自然対数の底とする。

(1)

(i) $y = e^x$ のグラフ上の点のうち、点 $(1, 0)$ との距離が最小となる点の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ である。

(ii) $\int_0^1 xe^{-x} dx = \boxed{\text{ウ}} - \boxed{\text{エ}} e^{-1}$ である。

(iii) $\int x^2 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + \boxed{\text{オ}}x + \boxed{\text{カ}}) + C$ である。ここで、 C は積分定数である。

(2) $r > 0$ とし、

$$f(x) = xe^{-x} + r, \quad g(x) = \sqrt{r^2 - (x-1)^2} + e^{-1}$$

とする。 $1 - r \leq x \leq 1$ を満たす任意の x に対して $f'(x) - g'(x) \leq 0$ となる r の最大値を r_0 とする。

(i) $f'(x) - g'(x)$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{r^2 - (x-1)^2}} \left(e^{-x} \sqrt{r^2 - (x-1)^2} \boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}} \right)$$

が成り立つ。ここで、 $\boxed{\text{キ}}$ は符号 $+$, $-$ のいずれかである。

(ii) $r_0 = \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

(iii) $r = r_0$ のとき、 $f(x) - g(x)$ の $1 - r \leq x \leq 1$

の範囲における最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

- (iv) $r = r_0$ とする。 $y = f(x)$ のグラフ, $y = g(x)$ のグラフ, および,
 y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ス}}} - \boxed{\text{セ}} e^{-1} - \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}} \pi$$

である。

- (v) $r = r_0$ とする。 $y = f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた部分のうち,
 $0 \leq x \leq 1$ の部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積
 は

$$\pi \left(\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} + \boxed{\text{テ}} \sqrt{2} - \boxed{\text{ト}} \sqrt{2} e^{-1} - \frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}} e^{-2} \right)$$

である。