平成 27 年度・入学試験問題

数　　学（医）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 試験終了後，問題冊子および草稿用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について，求める手順をわかりやすく説明すること。

◇M4(863—44)

1. 点 $\mathrm{A}\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$ および放物線 $C : y = \dfrac{x^2}{2}$ を考える。点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする。ただし, m は正である。次の問いに答えよ.

(1) C と ℓ の交点の座標を m で表せ。

(2) 第 2 象限において C, ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積 $S(m)$ を求めよ。

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする。$\dfrac{T(m)}{mS(m)} = 18$ となる m に対し, $\dfrac{n}{10} < m < \dfrac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2. $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \left|2\cos^2 t + 2\sin t\cos t - 1\right| dt$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2) 積分を計算して, $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそれらを与える x の値を求めよ。

3. 図 1, 2 のような網目状の道があり, 頂点 O を出発点とし, 各頂点においてそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で上、または右斜め下に進む。ただし, 右斜め下に道がない場合は必ず上に, 上に道がない場合は必ず右斜め下に進み, A, B, C のいずれかに到達したら停止する。次の問いに答えよ。

(1) 図 1 において, 各頂点 A, B, C に到達する確率 $P_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}, P_{\mathrm{C}}$ を求めよ。

(2) 図 2 において, $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$ をともに通過して C に到達する確率を求めよ。

(3) 図 2 において, B に到達する確率を求めよ。

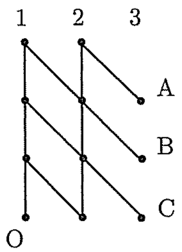

図 1

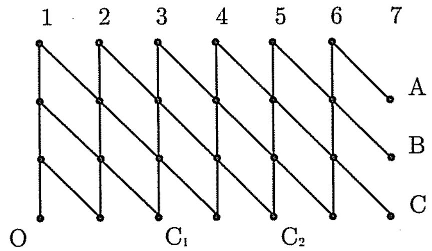

図 2

4. 空間内の点 O, A_1, A_2, B, C を考える。このとき, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ はともに長さが 1 で, 角度 θ $(0 < \theta \leqq \pi/2)$ をなす。また点 B は O, A_1, A_2 を含む平面 H 上に存在せず, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = c_1$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = c_2$ を満たす（ただし c_1, c_2 はいずれも 0 でない実数であるとする）。さらにベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = c_1\overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + c_2\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ のように表され, かつベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と垂直である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 角度 θ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 > c_1^2 + c_2^2$ が成り立つことを示せ。ただし, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の長さを表す。

(3) $c_1 = c_2 = c$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b$ とする。また, $\overrightarrow{\mathrm{OD}_1} = c\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}_2} = c\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$ となるように, 空間上に点 D_1, D_2 を与える。四面体 $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2\mathrm{CB}$ の体積を, b, c を用いて表しなさい。

(4) (3) の条件の下で 3 点 $\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{B}$ により定まる平面に対し, 点 C から垂線を引いたとき, 垂線と平面の交点を T とする。このとき, CT の長さを b, c で表しなさい。