B

平成27年度

前期日程

数学問題

〔注意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．
2. **受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に右詰めで正確に記入すること．**
3. 問題本文は，3 ページと，5 ページと，7 ページと，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．
5. 解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．**指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．**
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない．
8. 問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること．

(下書き用紙)

(下書き用紙)

$\boxed{1}$　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x)}\log(1+\frac{x}{n}) \qquad (x \geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$ を

$$I_n = \int_0^n f_n(x)\,dx$$

で定める．$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $\log(1+x) \leqq \log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ であることは用いてよい．

（配点率 20 %）

(下 書 き 用 紙)

$\boxed{2}$ 実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ 以下の問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ．

(2) $p,\ q,\ \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする．そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ．

（配点率 20 %）

(下書き用紙)

$\boxed{4}$　座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある．P, Q は時刻 0 において，原点を出発する．P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く．その後，ともに時刻 1 で停止する．点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ．

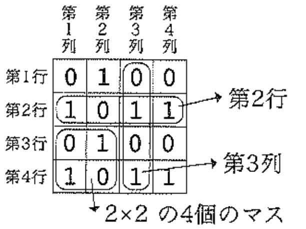
(2) $V(t)$ の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

(下書き用紙)

5 n を 2 以上の整数とする．正方形の形に並んだ $n \times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる．マスは上から第 1 行，第 2 行，…，左から第 1 列，第 2 列，…，と数える．数字の入れ方についての次の条件 p を考える．

条件 p: 1 から $n-1$ までのどの整数 i, j についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る．



($n = 4$ の場合の入れ方の例)

(1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ．

(2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ．

（配点率 20 %）