（前期日程）

平成28年度　数　学

問題の選択方法

- 教育学部（学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系を除く），農学部，工学部環境建設工学科社会デザインコースの受験者は
  1　2　3　5の4問
- 教育学部学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系の受験者は
  1　2　4　5の4問
- 理学部，工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）の受験者は
  5　6　7　8　9の5問
- 医学部の受験者は
  6　7　8　9　10の5問

を解答すること。

注意事項

1　試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。

2　この問題冊子は，19ページあります。

試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督者に知らせなさい。

3　解答は，すべて解答用紙の指定のところに記入しなさい。やむをえない場合は，解答用紙の裏も使用してよい。ただし，裏を使用する場合は，その旨を解答用紙の表に明記し，裏に書かれた指示に従って解答すること。

4　問題冊子の余白は下書きに使用してよい。

$\boxed{1}$ （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

次の問いに答えよ。

(1) $2m^2-n^2-mn-m+n=18$ を満たす自然数 m，n を求めよ。

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\log_{\cos\theta}\left(\tan^2\theta+\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{3}\right)=-2$ を満たす θ を求めよ。

(3) 袋の中に1，2，3，4，5の数字が1つずつ書かれた5個の玉が入っている。5人が順にこの袋の中から玉を1個ずつ取り出し，玉に書かれた数字を記録する。この操作が終了したら，すべての玉を袋の中に戻し，同じ操作をもう一度行う。このとき，1回目と2回目に取り出した玉に書かれた数字が同じであるという人がちょうど3人になる確率を求めよ。

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2 |t-x|\,dt$ を最小にする x の値を求めよ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

2 （教育学部・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

放物線 $C: y = x^2 + 2ax + b$ について次の問いに答えよ。ただし，a，b は実数とする。

(1) 放物線 C 上の点 $(t,\ t^2 + 2at + b)$ を通る接線の方程式を求めよ。

(2) 平面上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ から C に相異なる 2 本の接線 ℓ_1，ℓ_2 が引けるとする。

(i) p，q は $q < p^2 + 2ap + b$ を満たすことを示せ。

(ii) ℓ_1 と ℓ_2 が直交するとき，q を a と b を用いて表せ。

（下書き用紙）

数学の試験問題は次に続く。

3　（教育学部（学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系を除く）・農学部・工学部環境建設工学科社会デザインコース）

2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が $a_1=0$，$b_1=1$ および

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n-b_n \\ b_{n+1}=a_n+3b_n+1 \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定められている。

(1)　$c_n=a_n+b_n+1$ によって定められる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n と n を用いて表せ。

(3)　$d_n=\dfrac{a_n+1}{2^n}$ によって定められる数列 $\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{2^k}$ を求めよ。

(下書き用紙)

数学の試験問題は次に続く。

4 （教育学部学校教育教員養成課程中等教育コース自然科学系）

$f(x)=xe^{-x}$ とし，関数 $y=f(x)$ のグラフを C_1 とする。また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする。ただし，a は $a>1$ を満たす実数である。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ。なお，$\lim_{x \to \infty} xe^{-x}=0$ であることを用いてよい。

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする。$a=2$ のとき C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

5 （教育学部・農学部・理学部・工学部）

空間内の2点A(4，−2，2)，B(2，−4，4)に対して，線分ABを直径とする球Sの中心をCとする。

(1) 球Sの方程式を求めよ。

(2) xy平面と平行な平面αのうちSとαが交わってできる円の半径が最大となるようなαの方程式を求めよ。

(3) 原点Oから最も近いS上の点D，および最も遠い点Eの座標をそれぞれ求めよ。

(4) (2)で求めたαとSが交わってできる円上を動く点Pに対して，△CDPの面積を最大とするPの座標をすべて求めよ。ただし，Dは(3)で求めた点である。

（下書き用紙）

数学の試験問題は次に続く。

6 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ を正の実数とする。楕円 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動して得られる楕円が y 軸と直線 $y=x$ に接するような $a,\ b$ を求めよ。

(2) 1辺の長さが $\sqrt{n}$ の正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ における三角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の面積を S_n とする。このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(3) $a,\ b$ は実数で $a>0$ を満たすとする。放物線 $y=\dfrac{1}{2a^2}x^2$ と曲線 $y=\log x+b$ がただ1つの共有点Pをもつとき，Pの座標および b を a を用いて表せ。

(4) $1\leqq x\leqq 2$ とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_1^2 \frac{|t-x|}{t^2}\,dt$ を最小にする x の値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

7 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

$f(x)=\dfrac{x}{2}$，$g(x)=x$，$h(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=1$ とし，2枚の硬貨を繰り返して投げ，n 回目の事象により x_n を次のように定める。

$$x_n=\begin{cases} f(x_{n-1}) & （2\text{枚とも表のとき}）\\ g(x_{n-1}) & （1\text{枚が表，}1\text{枚が裏のとき}）\\ h(x_{n-1}) & （2\text{枚とも裏のとき}）\end{cases}$$

また p_n，q_n，r_n をそれぞれ $0<x_n\leqq\dfrac{1}{3}$ である確率，$\dfrac{1}{3}<x_n\leqq\dfrac{2}{3}$ である確率，$\dfrac{2}{3}<x_n\leqq 1$ である確率とする。

(1) すべての自然数 n に対して $0<x_n\leqq 1$ を示せ。

(2) p_1，q_1，r_1 を求めよ。

(3) p_n，q_n，r_n を p_{n-1}，q_{n-1}，r_{n-1} を用いて表せ。

(4) p_n-r_n を求めよ。

(5) p_n を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

8 （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

z_0 を虚数単位 i と異なる複素数とする。複素数 z_n を

$$z_n = i + \frac{\sqrt{2}\,(z_{n-1} - i)(1 + i)}{2} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。

(1) すべての自然数 n に対し $z_n \neq i$ であることを示せ。

(2) $\dfrac{z_n - i}{z_{n-1} - i}$ の絶対値 r と偏角 θ を求めよ。ただし，θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。

(3) $z_m = z_0$ となる最小の自然数 m を求めよ。

(4) 複素数平面上において z_n の表す点を P_n とする。(3)で求めた m に対し m 本の線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$，……，$\mathrm{P}_{m-1}\mathrm{P}_m$ で囲まれる図形の面積を S とする。$z_0 = 1 - i$ のとき S の値を求めよ。

(下 書 き 用 紙)

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{9}$ （理学部・工学部（環境建設工学科社会デザインコースを除く）・医学部）

$f(x) = xe^{-x}$ とし，関数 $y = f(x)$ のグラフを C_1 とする。また，C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする。ただし，a は $a > 1$ を満たす実数である。

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値を調べ C_1 の概形をかけ。なお，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} xe^{-x} = 0$ であることを用いてよい。

(2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。

(3) 原点を O とし，C_2 と x 軸の交点を A とする。C_1，C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4) (3)で求めた S に対して，$S < \dfrac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ。

（下 書 き 用 紙）

数学の試験問題は次に続く。

$\boxed{10}$ （医学部）

正方形ABCDの内部の点Pに対して$\angle \mathrm{CPD}$が直角であるとき，$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}$の最大値を求めよ。