

数 学

(数Ⅰ，数Ⅱ，数Ⅲ，数A，数B)

9：00～11：00

注 意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題紙を開いてはならない。
2. 問題紙は3ページある。
3. 解答用紙は

解答用紙番号
数学0—1

 (問①用)，

解答用紙番号
数学0—2

 (問②用)，

解答用紙番号
数学0—3

 (問③用)，

解答用紙番号
数学0—4

 (問④用)，

解答用紙番号
数学0—5

 (問⑤用)の5枚である。
4. 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
5. 受験番号および座席番号(上下2箇所)は，監督者の指示に従って，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
6. 各問に対する解答は，それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし，裏面を使用してはならない。
7. 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
8. 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
9. 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には，結果を導く過程を重視するので，必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

- 1 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。 a を実数の定数とし、

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく。

- (1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。
- (2) 点 z が C 上を一周するとき、 $|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

- 2 $a > 0$ に対し、関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$$

をみたすとする。

- (1) $f(x)$ を求めよ。
- (2) $0 < a \leq 2\pi$ において、

$$g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ。

- 3 机のひきだし A に 3 枚のメダル、ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。

ひきだし A の各メダルの色は金、銀、銅のどれかであり、ひきだし B の各メダルの色は金、銀のどちらかである。

- (1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。
- (2) ひきだし A、B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。
- (3) ひきだし A、B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき、ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

- 4 (1) 次の方程式が異なる3つの0でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (2) 方程式①の3つの実数解を s, t, u とし、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

によって定める。このとき、

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つことを示せ。

- (3) (2)の a_n がすべて整数であることを示せ。

- 5 空間の2点 $A(0, 0, 2), B(0, 1, 3)$ を通る直線を l とし、2点 $C(1, 0, 0), D(1, 0, 1)$ を通る直線を m とする。 a を定数として、 l 上にも m 上にもない点 $P(s, t, a)$ を考える。

- (1) P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし、 P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。 Q, R の座標をそれぞれ s, t, a を用いて表せ。
- (2) P を中心とし、 l と m がともに接するような球面が存在するための条件を s, t, a の関係式で表せ。
- (3) s, t と定数 a が(2)の条件をみたすとき、平面上の点 (s, t) の軌跡が放物線であることを示し、その焦点と準線を a を用いて表せ。