B

平 成 28 年 度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注　意〕

1．問題冊子および解答用冊子は，試験開始の合図があるまで開いてはいけない．

2．受験番号は，解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること．

3．問題本文は，3 ページ，5 ページ，7 ページ，9 ページにある．脱落している場合は直ちに申し出ること．

4．解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚が一緒に折り込まれている．解答用紙をミシン目に従って切り離すこと．

5．解答（途中の計算，推論等を含む）は，指定された解答用紙の指定された場所に記入すること．指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする．

6．問題冊子の余白は下書きに使用してもよい．

7．解答用紙は持ち帰ってはいけない．

8．問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること．

1　1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$ を次の条件 (ア)，(イ)，(ウ) で定める．

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　　$(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　　$(n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots)$

以下の問いに答えよ．

(1) $a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ．

(2) $a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ．

(3) 1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) c を正の定数とする．正の実数 x，y が $x+y=c$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

の最小値を c を用いて表せ．

(2) 正の実数 x，y，z が $x+y+z=1$ をみたすとき，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{4}{3z}\right)$$

の最大値を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{3}$ 座標平面において，原点Oを中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}\,(x-1)^2$ は，ただ1つの共有点 (a,b) をもつとする．

(1) a，b，r の値をそれぞれ求めよ．

(2) 連立不等式

$$a \leqq x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \sqrt{2}\,(x-1)^2, \quad x^2+y^2 \geqq r^2$$

の表す領域を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ．

（配点率 20 %）

$\boxed{4}$ 正の整数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

とおき，1以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする．

(1) $\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ．

(2) $S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組 (n,m) をすべて求めよ．

(3) 整数 a と $0 \leqq b < 1$ をみたす実数 b を用いて，

$$A_{20}\,S_{20}=a+b$$

と表すとき，b の値を求めよ．

（配点率 20 %）

5 円上の 5 点 A，B，C，D，E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している．5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2 = y\,(y - x)$ がなりたつことを示せ．

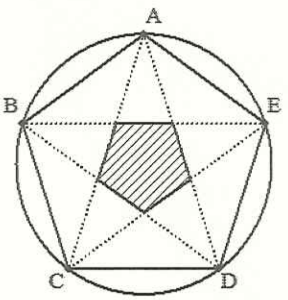
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする．R_2 の一辺の長さを x を用いて表せ．

(4) $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{S_1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k$$

を求めよ．



斜線部分が R_2

（配点率 20 %）