平成28年度　入学者選抜学力検査問題

# 数　　学（理系$\beta$）

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ

**注　意　事　項**

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で4題あります。また，解答用紙は4枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に2箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点50点は200点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔1〕 (配点 50) $n$ を自然数とする。このとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\alpha$，$\beta$ を実数とし，

$$f(x)=\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\beta}{x-\beta}$$

とする。$f(x)$ の第 $n$ 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について，次の等式が成り立つことを，数学的帰納法によって証明しなさい。

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left\{\frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}}-\frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}}\right\}$$

(2) $b$，$c$ を $b^2>4c$ を満たす実数とし，

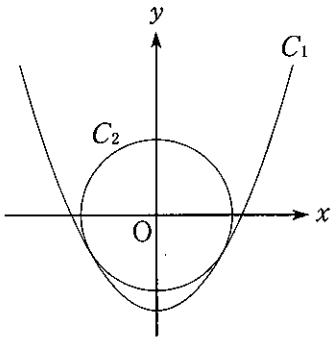
$$h(x)=\frac{x}{x^2-bx+c}$$

とする。また，$h(x)$ の第 $n$ 次導関数 $h^{(n)}(x)$ に対し，$a_n=\dfrac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ とおく。

(i) 2 次方程式 $x^2-bx+c=0$ の解を $\alpha$，$\beta$ とする。$a_n$ を $\alpha$，$\beta$，$n$ を用いて表しなさい。

(ii) $a_{n+2}-ba_{n+1}+ca_n=0$ が成り立つことを示しなさい。

〔2〕 (配点 50) $a > \frac{1}{2}$，$b > 1$ とし，放物線 $y = ax^2 - b$ を $C_1$，原点を中心とする半径 1 の円を $C_2$ とする。$C_1$ と $C_2$ の共有点が下図のように 2 個であるとき，次の問いに答えなさい。




(1) $a$ と $b$ の関係を式で表しなさい。

(2) $C_1$ と $x$ 軸で囲まれ，かつ $C_2$ の内部に含まれない部分の面積を $S$ とする。$S$ を $a$ を用いて表しなさい。

(3) $a$ が $a > \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，(2) の $S$ の最小値を求めなさい。

〔3〕 (配点 50) 座標平面上の 3 点 O(0, 0), A($x_1$, $y_1$), B($x_2$, $y_2$) を頂点とする △OAB を考える。

$$\alpha = x_1 + y_1 i, \qquad \beta = x_2 + y_2 i$$

とするとき，次の問いに答えなさい。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) △OAB の面積 $S$ は

$$S = \frac{1}{4}|\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta|$$

で表されることを示しなさい。ただし，$\overline{\alpha}$，$\overline{\beta}$ はそれぞれ $\alpha$，$\beta$ と共役な複素数である。

(2) $k$ を 2 より大きい定数とする。$\alpha$，$\beta$ が

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha - 1| + |\alpha + 1| = k$$

を満たすとき，次の各値は $\alpha$，$\beta$ によらず一定であることを示しなさい。

(i) $|\alpha|^2 + |\beta|^2$

(ii) △OAB の面積 $S$

〔4〕 (配点 50) 点 O(0, 0, 0) と点 A(1, 0, 0) に対して，点 B($b_1$, $b_2$, 0) と点 C($c_1$, $c_2$, $c_3$) は

$$\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COA} = \frac{3\pi}{5},\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1$$

を満たしているとする。$b_2 > 0$，$c_3 > 0$，また，$p = 2\cos\dfrac{\pi}{5}$ とするとき，以下の問いに答えなさい。ただし，次の等式①を証明なしに用いてもよい。

$$4\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 1 \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) 等式 $p^2 = p + 1$ が成り立つことを示しなさい。

(2) $b_1 = \dfrac{1-p}{2}$ であることを示しなさい。

(3) 点 E(0, 0, 1) に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を実数 $k$, $l$, $m$ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + l\overrightarrow{\mathrm{OB}} + m\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

と表すとき，$m^2 = \dfrac{2+p}{5}$ であることを示しなさい。

(4) 四面体 OABC の体積を $V$ とする。$V = \dfrac{p}{12}$ であることを示しなさい。