

数 学

(数Ⅰ, 数Ⅱ, 数Ⅲ, 数A, 数B)

9:00~11:00

注 意

- 試験開始の合図があるまで、この問題紙を開いてはならない。
- 問題紙は3ページある。
- 解答用紙は

解答用紙番号
数学0-1

 (問①用),

解答用紙番号
数学0-2

 (問②用),

解答用紙番号
数学0-3

 (問③用),

解答用紙番号
数学0-4

 (問④用),

解答用紙番号
数学0-5

 (問⑤用)の5枚である。
- 解答用紙は5枚とも全部必ず提出せよ。
- 受験番号および座席番号(上下2箇所)は、監督者の指示に従って、すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入せよ。
- 各問に対する解答は、それぞれ3で指定された解答用紙に記入せよ。
ただし、裏面を使用してはならない。
- 必要以外のことを解答用紙に書いてはならない。
- 問題紙の余白は下書きに使用してもさしつかえない。
- 問題紙・下書き用紙は回収しない。

解 答 上 の 注 意

採点時には、結果を導く過程を重視するので、必要な計算・論証・説明などを省かずに解答せよ。

1 自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して、 $n(n+1) + a = (n+k)^2$ が成り立つとき、

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1) + 14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

2 関数 $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ について、以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

3 複素数平面上に3点 O, A, B を頂点とする $\triangle OAB$ がある。ただし、 O は原点とする。 $\triangle OAB$ の外心を P とする。3点 A, B, P が表す複素数を、それぞれ α, β, z とするとき、

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め、点 $A(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

4 さいころを続けて投げて、数直線上の点Pを移動させるゲームを行う。初め点Pは原点0にいる。さいころを投げるたびに、出た目の数だけ、点Pを現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い、点Pが10に達するか越えた時点でゲームを終了する。 n 回目の試行でゲームが終了する確率を p_n とする。

(1) $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) p_9 の値を求めよ。

(3) p_3 の値を求めよ。

5 座標平面上の3点A(1, 0), B(3, 1), C(2, 2)を頂点とする $\triangle ABC$ の内部および境界を T とおく。実数 a に対して、条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす座標平面上の点Pの全体を D とする。ただし、APは点Aと点Pの距離を表す。

(1) D が少なくとも1つの点Pを含むような a の値の範囲を求めよ。

(2) D が T を含むような a の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで、 D が T に含まれるような a の値の範囲を求めよ。