

平成 29 年度

前 期 日 程

数 学 問 題

〔注 意〕

1. 問題冊子および解答用冊子は、試験開始の合図があるまで開いてはいけない。
2. 受験番号は、解答用紙の受験番号欄（計 10 か所）に正確に記入すること。
3. 問題本文は、3 ページ、5 ページ、7 ページ、9 ページにある。脱落している場合は直ちに申し出ること。
4. 解答用冊子には表紙 1 枚と解答用紙 5 枚と白紙 2 枚と一緒に折り込まれている。解答用紙をミシン目に従って切り離すこと。
5. 解答（途中の計算、推論等を含む）は、指定された解答用紙の指定された場所に記入すること。指定された解答用紙の指定された場所以外に記入した解答は無効とする。
6. 問題冊子の余白は下書きに使用してもよい。
7. 解答用紙は持ち帰ってはいけない。
8. 問題冊子および表紙・白紙は持ち帰ること。

(下書き用紙)

(下書き用紙)

1 双曲線 $H : x^2 - y^2 = 1$ 上の 3 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(s, t)$ ($t \neq 0$) を考える.

- (1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき, P の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき, Q の座標を s と t を用いてあらわせ.
- (3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ.

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

2 複素数 z は $z^5 = 1$ を満たし、実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1、裏が出れば 0 とし、5 回投げて出た順に a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 とおく。複素数 w を $w = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$ と定める。

- (1) 5 回とも表が出たとする。 w の値を求めよ。
- (2) $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = a_4 = 1$ のとき、 $|w| < 1$ であることを示せ。
- (3) $|w| < 1$ である確率を求めよ。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

3 a, b を自然数とし、不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad (\text{A})$$

を考える。次の問いに答えよ。ただし、 $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること、 $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) 不等式 (A) を満たし $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

であることを示せ。

(2) 不等式 (A) を満たす自然数 a, b の組のうち、 $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ。

(配点率 20 %)

4 b, c を実数とする。2 次関数 $f(x) = -x^2 + bx + c$ が

$$0 \leq f(1) \leq 2, \quad 5 \leq f(3) \leq 6$$

を満たすとする。

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき、放物線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(配点率 20 %)

(下書き用紙)

5 xy 平面上で放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく. 回転体 L に含まれる点のうち, xy 平面上の直線 $x = 1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく.

(1) t を $0 \leq t \leq 2$ を満たす実数とする. xy 平面上の点 $(0, t)$ を通り, y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする. $t = (2 \cos \theta)^2$

$\left(\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$ のとき, $S(t)$ を θ を用いてあらわせ.

(2) M の体積 V を求めよ.

(配点率 20 %)