平成23年度
数学問題紙

答案作成上の注意

1. 数学の問題紙のページ数は２ページである。
2. 解答用紙は，解答用紙 1，解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4 の４枚，草案紙は１枚である。
3. **受験番号は，すべての解答用紙の指定された箇所に必ず記入**しなさい。
4. **解答用紙のみを提出**しなさい。**解答用紙は４枚とも必ず提出**しなさい。
5. 答案作成にあたっては，次の事項を守りなさい。
   (1) 解答はすべて解答用紙の指定された欄に書くこと。裏面に書かないこと。
   (2) 解答用紙には，受験番号及び解答以外のことを書かないこと。

問題 1　△ABC は AB＝AC の 2 等辺三角形とする。D を辺 BC 上の点とし，AD の延長線が△ABC の外接円と交わる点を P とする。次の問いに答えよ。

問 1　AP＝BP＋CP であるとき，△ABC は正三角形であることを示せ。

問 2　$\dfrac{1}{\mathrm{BP}}+\dfrac{1}{\mathrm{CP}}=\dfrac{1}{\mathrm{DP}}$ であるとき，△ABC は正三角形であることを示せ。

問題 2　平面上に正三角形でない鋭角三角形 ABC が与えられている。辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおく。さらに，辺 BC，CA，AB をそれぞれ $s-c:s-b$，$s-a:s-c$，$s-b:s-a$ に内分する点を X，Y，Z とする。また，O を原点とする。次の問いに答えよ。

問 1　点 N を $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\dfrac{(s-a)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(s-b)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(s-c)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{s}$ と定義するとき，3 直線 AX，BY，CZ は N で交わることを示せ。

問 2　P を△ABC の内部の点，△PBC，△PCA，△PAB の面積をそれぞれ S_A，S_B，S_C とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{S_A\overrightarrow{\mathrm{OA}}+S_B\overrightarrow{\mathrm{OB}}+S_C\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{S_A+S_B+S_C}$$

と表される。このことを用いて，△ABC の外心を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$a$，$b$，$c$ を用いて表せ。

問 3　△ABC の重心を G とする。点 N が Q と G を通る直線上にあるとき，△ABC は 2 等辺三角形であることを示せ。

問題 3 曲線 $y=e^{ax+b}$ $(a \geqq 1)$ と曲線 $y=e^{-x}$ が一点で交わり，交点におけるそれぞれの接線が垂直に交わっているとする。次の問いに答えよ。

問 1 交点の座標を $\left(x(a),\ y(a)\right)$ とおくとき，b, $x(a)$, $y(a)$ をそれぞれ a を用いて表せ。

問 2 曲線 $y=e^{ax+b}$ $(a \geqq 1)$ を $C(a)$ で表す。曲線 $C(a)$ と曲線 $C(a+1)$ の交点の x 座標を $X(a)$ とおくとき，

$$\lim_{a \to \infty}\left(X(a)-x(a)\right)$$

を求めよ。

問 3 $X(a)-x(a)$ は $a \geqq 1$ のとき単調減少であることを示せ。

問題 4 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}-\tan x \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。次の問いに答えよ。

問 1 $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で連続で，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ では $g(x)=f(x)$ を満たす関数とする。

(a) $g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。

(b) $g(x)$ の増加，減少を調べよ。

(c) $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ を求めよ。

問 2 n を自然数とし，c_n を $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}-c_n}^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\,dt$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の数とする。次の極限を求めよ。

(a) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} n(1-\cos c_n)$

(b) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt{n}\,c_n$