平　成　23　年　度

試験問題（記述式）──数　　学

（ページ数）
2ページ

（注意） 解答はすべて別紙解答用紙の定められた欄に書くこと。

1 以下の問に答えよ。

(1) a，b，c は正の整数で，$a < b < c$，$a+b < c$ を満たすものとする。このとき整式 $ax^2-(a^2+ab)x+a^2b-174$ が $x-c$ で割り切れるような $(a,\ b,\ c)$ の組があればすべて求めよ。

(2) $\alpha = 1+\sqrt{3}i$，$\beta = 1-\sqrt{3}i$ のとき

$$\left(\frac{\beta^2-4\beta+8}{\alpha^{n+2}-\alpha^{n+1}+2\alpha^n+4\alpha^{n-1}+\alpha^3-2\alpha^2+5\alpha-2}\right)^3$$

はいくらか。ただし，n は2以上の自然数，i は虚数単位とする。

(3) $y = \cos x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ の逆関数を $y = f(x)$ とおく。$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ における，$f(x)$ の第2次導関数の値 $f''\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ はいくらか。

2 0，1，2，3，4，5の6つの数字を重複せずに用いて，n 桁の整数を作る $(n \leqq 6)$。このとき，以下の問に答えよ。

(1) $n = 3$，すなわち3桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも5にならないような整数はいくつできるか。

(2) $n = 4$，すなわち4桁の整数で，隣り合う数字の和がどれも3にならないような整数はいくつできるか。

(3) $n = 4$，すなわち4桁の整数で，隣り合う数字の和が5になる箇所が2つあるような整数をすべて加えるといくらになるか。

3 xyz 空間の３点 A$(5,\ 0,\ 0)$，B$(4,\ 1,\ 0)$，C$(5,\ 0,\ \sqrt{2})$ が定める平面を T，T 上にあって点Ａを中心として半径$\sqrt{2}$をもつ円を U とする。このとき，以下の問に答えよ。

(1) 点Ｐは円 U の周上にある。$\angle\mathrm{PAB} = \theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ とするとき，Ｐの座標 $(u,\ v,\ r)$ を θ を用いて表せ。

(2) ２点 D$(10,\ 0,\ 0)$，Ｐを通る直線が yz 平面と交わる点を Q$(0,\ Y,\ Z)$ とする。Y と Z を θ を用いて表せ。

(3) (2)の Y，Z から θ を消去して，Ｑの軌跡が楕円になることを示せ。また，その楕円の概形を yz 平面上に図示せよ。

4 数列

$$1^{0.01},\ 2^{0.02},\ 2^{0.02},\ 3^{0.03},\ 3^{0.03},\ 3^{0.03},\ 4^{0.04},\ 4^{0.04},\ 4^{0.04},\ 4^{0.04},\ 5^{0.05},\ \cdots,\ (n-1)^{\frac{n-1}{100}},\ \underbrace{n^{\frac{n}{100}},\ \cdots,\ n^{\frac{n}{100}}}_{n\text{個}},\ (n+1)^{\frac{n+1}{100}},\ \cdots$$

について，以下の問に答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) 第36項はいくらか。

(2) 不定積分 $\int x^2 \log_e x\, dx$ を求めよ。

(3) 第１項から第36項までのすべての項の積を A とする。このとき A の整数部分の桁数はいくらか。ただし，$2.0 < \log_e 8 < 2.1$，$2.1 < \log_e 9 < 2.2$，$2.30 < \log_e 10 < 2.31$である。