C — 1

平成23年度入学者選抜学力検査問題

数　　　学

注　意　事　項

1. この冊子は，監督者から解答を始めるよう合図があるまで開いてはいけません。
2. 「問題の選択に関する注意」は裏表紙に記載してあるので，この冊子を裏返して必ず読み，志望学部・学科等により解答すべき問題の番号を確認すること。ただし，この冊子を開いてはいけません。
3. 監督者から指示があったら，解答用紙の上部の所定欄には受験番号，座席番号を，また，下部の所定欄には座席番号をそれぞれ必ず記入すること。
4. 解答は，問題ごとに指定された解答用紙に記入すること。指定以外の解答用紙に書かれた解答は0点となることがあります。
5. 解答は，解答用紙の裏面に書かないこと。
6. 各問題とも，特に指示がないかぎり，必ず解答の過程を書き，結論を明示すること。小問に分けられているときには，小問の結論を明示すること。
7. この冊子は16頁です。落丁／乱丁または印刷の不備なものがあれば申し出ること。
8. 下書き等は，この冊子の余白の部分を使用すること。
9. 退室の際には，解答用紙は記入の有無にかかわらず机上に置いておくこと。持ち帰ってはいけません。
10. この冊子は持ち帰ってかまいません。

1 1個のさいころを3回投げる。1回目に出る目を a_1, 2回目に出る目を a_2, 3回目に出る目を a_3 とし, 整数 n を

$$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$$

と定める。

(1) $n=0$ である確率を求めよ。

(2) $|n|=30$ である確率を求めよ。

2 三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$, 外接円の半径は 1, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$, $\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ である。

このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。

3 四角錐 OABCD において，底面 ABCD は1辺の長さ2の正方形で，

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{OD} = \sqrt{5}$$

である。

(1) 四角錐 OABCD の高さを求めよ。

(2) 四角錐 OABCD に内接する球 S の半径を求めよ。

(3) 内接する球 S の表面積と体積を求めよ。

4 実数 x の関数 $f(x)=|x-1|(x-2)$ を考える。$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=x+a$ との共有点の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるかを調べよ。

$\boxed{5}$ a は正の実数とし，座標平面上の直線 l : $y=x$ と放物線 C : $y=ax^2$ を考える。C 上の点 (x,y) $\left(\text{ただし } 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。

以下の問いに答えよ。

(1) $d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2) 実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

6 三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

7 n 人 ($n \geqq 3$) でじゃんけんを 1 回行うとき, 次の問いに答えよ。

(1) 1 人だけが勝つ確率を求めよ。

(2) あいこになる確率を求めよ。

(3) 勝つ人数の期待値を求めよ。

ここで「あいこ」とは 1 種類または 3 種類の手が出る場合であり, 勝つ人数が 0 の場合である。

8 n 段の階段を上るのに，一歩で１段，２段，または３段を上ることができるとする。この階段の上り方の総数を a_n とおく。たとえば，$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4$ である。

(1) a_4, a_5 の値を求めよ。

(2) $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}$ $(n \geqq 1)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。

(3) a_{10} の値を求めよ。

9 r は $0 < r < 1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ があり，その頂点を反時計回りに A_n, B_n, C_n, D_n とする。さらに R_n は次の条件 (i), (ii) を満たすとする。

(i) 正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0, 0)$, $\mathrm{B}_0(1, 0)$, $\mathrm{C}_0(1, 1)$, $\mathrm{D}_0(0, 1)$ である。

(ii) $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_2, A_3, A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2) A_{4n} の座標を (x_n, y_n) $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ とおく。$x_{n+1} - x_n$ および $y_{n+1} - y_n$ を r, n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ。

10 三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

$\boxed{11}$ $f(x) = x\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $g(x) = \log(1+x^2)$ (x は実数) とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $x > 0$ のとき $f(x) > g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right) - 2\log n\right\}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{12}}$ $k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$ がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で1つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

13 a, b, c は実数とし，

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + 2$$

とおく。さらに 4 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解 α, β と 2 つの虚数解をもち，

$$\alpha + \beta = -(a+1), \quad \alpha\beta = \frac{1}{a}$$

を満たすと仮定する。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。

14 次の問いに答えよ。

(1) 不等式

$$\sqrt{x^2+y^2} \geqq x+y+a\sqrt{xy}$$

が任意の正の実数 x, y に対して成立するような, 最大の実数 a の値を求めよ。

(2) 0 以上 1 以下の実数 a, b, c, d に対して

$$abcd \leqq \frac{4}{27} \text{ または } (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)(1-d^2) \leqq \frac{4}{27}$$

が成り立つことを証明せよ。

15 座標平面上の点 $(x,\ y)$ が

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0 \\ x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える $x,\ y$ の値を求めよ。

問題の選択に関する注意

志望学部・学科等により，以下に示す問題に解答すること。

<table>
<tr><th>科目</th><th colspan="2">学 部 ・ 学 科 等</th><th>解答する問題番号</th></tr>
<tr><td>数学 I
数学 A</td><td>教育学部</td><td>算数科選修
理科教育分野
技術科教育分野</td><td>1 2 3 4</td></tr>
<tr><td rowspan="4">数学 I
数学 II
数学 A
数学 B</td><td>文学部
法経学部</td><td>行動科学科</td><td>1 2 5 6</td></tr>
<tr><td>園芸学部</td><td></td><td>2 5 6 7</td></tr>
<tr><td>教育学部</td><td>情報教育分野</td><td>2 5 6 8</td></tr>
<tr><td>教育学部</td><td>数学科教育分野</td><td>2 3 5 6 7 8</td></tr>
<tr><td rowspan="4">数学 I
数学 II
数学 III
数学 A
数学 B
数学 C</td><td>理学部
工学部</td><td>生物学科，地球科学科
建築学科
都市環境システム学科
デザイン学科</td><td>5 9 10 11 12</td></tr>
<tr><td>理学部
薬学部
工学部

先進科学プログラム</td><td>物理学科，化学科

機械工学科
メディカルシステム工学科
電気電子工学科
ナノサイエンス学科
共生応用化学科
画像科学科
情報画像学科</td><td>9 10 11 12 13</td></tr>
<tr><td>医学部</td><td></td><td>10 12 13 14 15</td></tr>
<tr><td>理学部</td><td>数学・情報数理学科</td><td>7 9 10 11 12 13</td></tr>
</table>