

平成 23 年 度

# 数 学

## 注意事項

1. 問題 

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|

 すべて必答問題です。
2. 解答用紙の裏面を使用する場合は、表面の右下に「裏面に続く」と記入し、表面の下の部分をもって上にめくり記入しなさい。表面とは上下が反対になります。
3. 図やグラフは解答の中で重要な位置をしめます。その特徴をおさえて、ていねいに描きなさい。
4. 解答者がたどる道筋や問題解決に至る要点を明確に意識して、論述式的答案を読みやすく書きなさい。
5. 問題用紙の余白は、下書きやミスのない計算のために十分活用しなさい。

1 (必答問題) (配点 50 点)

2次曲線  $C$  が媒介変数  $\theta$  を用いて,

$$x = 3 + 5 \cos \theta, \quad y = 2 + 3 \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

と表されている。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線  $C$  の方程式を  $x, y$  を用いて表せ。また、 $C$  を座標平面上に図示せよ。
- (2) 曲線  $C$  上の点  $P(3 + 5 \cos \theta, 2 + 3 \sin \theta)$  における  $C$  の接線  $\ell$  の方程式は,
- $$\frac{\cos \theta}{5}(x - 3) + \frac{\sin \theta}{3}(y - 2) = 1$$
- となることを示せ。
- (3) 曲線  $C$  の焦点を  $F_1, F_2$  とする。 $i = 1, 2$  に対し、 $F_i$  を通り、接線  $\ell$  に垂直な直線  $m_i$  の方程式を求めよ。
- (4)  $i = 1, 2$  に対し、直線  $m_i$  と  $\ell$  との交点を  $Q_i$  とする。点  $O'(3, 2)$  とするとき、線分  $O'Q_i$  の長さを求めよ。
- (5)  $P$  が曲線  $C$  を一周するとき、線分  $Q_1Q_2$  の長さの最大値、最小値、およびそのときの点  $P$  をそれぞれ求めよ。

2 (必答問題) (配点 50 点)

医学部における研究では、いろいろな動物が用いられる。これらの動物を生育して、研究者たちに販売する者の立場から、動物 A, B, C を題材にして、以下の問題を考察する。

- (1) 動物 A, B を生育するには、3種類の栄養素 p, q, r が必要である。生育量 (単位 kg) と栄養素の量は、ともに実数で示される。

(条件 a) A を  $x$  kg 生育するには、p が  $5x$ , q が  $5x$ , r が  $x$  の量、同時に必要である。A の販売価格は 10 万円/kg である。

(条件 b) B を  $y$  kg 生育するには、p が  $4y$ , q が  $y$ , r が  $2y$  の量、同時に必要である。B の販売価格は 5 万円/kg である。

手持ちの栄養素は今、p が 5, q が 4, r が 2 の量であると仮定する。このとき、A, B をそれぞれ何 kg 生育すれば、販売額が最大となるか。販売額の最大値、およびそのときの A, B の生育量をそれぞれ求めよ。

- (2) 動物 A, B に加えて、動物 C も p, q, r の栄養素によって生育できることがわかる。

(条件 c) C を  $z$  kg 生育するには、p が  $2z$ , q が  $3z$ , r が  $z$  の量、同時に必要である。C の販売価格は 8 万円/kg である。

手持ちの栄養素は今、p が 5, q が 4 の量であるが、(1)の場合と違って r はいくらでも手に入るものと仮定する。次の問いイ, ロ, ハに答えよ。

イ Cの生育量  $z$  kg は、 $z = k \left( 0 \leq k \leq \frac{11}{10} \right)$  として値を固定し、A、Bの生育量をそれぞれ  $x$  kg、 $y$  kg として変化させる。このとき、点  $(x, y)$  の動く領域  $D(k)$  を図示せよ。さらに、 $(x, y)$  がこの領域を動くとき、販売額の最大値を  $w(k)$  とかく。 $w(k)$  を  $k$  の式で表せ。

ロ Cの生育量  $z = k$  を、 $0 \leq k \leq \frac{11}{10}$  の範囲から  $\frac{11}{10} \leq k \leq \frac{4}{3}$  の範囲に変更する。このとき、点  $(x, y)$  の動く領域  $D(k)$  および販売額の最大値  $w(k)$  はどうなるか、調べよ。

ハ A、B、Cをそれぞれ何 kg 生育すれば、販売額が最大となるか。販売額の最大値、およびそのときのA、B、Cの生育量をそれぞれ求めよ。

**3** (必答問題) (配点 50 点)

実数  $k$  は  $\frac{\pi}{3} \leq k \leq \frac{\pi}{2}$  の範囲にあるとする。

$$f(x) = \int_{-k}^k \sin(x-t) \cos t \, dt \quad (-k \leq x \leq k)$$

$$g(x) = \int_{-k}^k |\sin(x-t)| \cos t \, dt \quad (-k \leq x \leq k)$$

と定めるとき、以下の問いに答よ。

- (1)  $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$  と  $g\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ , 2つの定積分の値をそれぞれ求めよ。
- (2) 差  $f(x) - g(x)$  は、区間  $-k \leq x \leq k$  で増加することを示せ。
- (3) 曲線  $y = g(x)$  の変曲点は何個あるか、調べよ。

4 (必答問題) (配点 50 点)

- (1) 3つの数  $2^{10} - 1$ ,  $3^{10} - 1$ ,  $4^{10} - 1$  の積を  $y = (2^{10} - 1)(3^{10} - 1)(4^{10} - 1)$  として, 全体集合  $U$  と部分集合  $A$ ,  $B$  を次のように定める。

$$U = \{x \mid x \text{ は } y \text{ の正の約数}\}$$

$$A = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 44 \text{ の倍数}\}$$

$$B = \{x \mid x \in U \text{ かつ } x \text{ は } 45 \text{ の倍数}\}$$

このとき, 部分集合  $A \cap \overline{B}$  に属する要素は, 全部で何個あるか。

以下, 数列  $a_n = 4^n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を考える。

- (2) 次の命題  $P$  を証明せよ。

命題  $P$   $n$  が 3 で割り切れることは,  $a_n$  が 9 で割り切れるための十分条件である。

- (3) 命題  $P$  において, 十分条件を必要十分条件に書きかえて, 命題  $Q$  をつくる。命題  $Q$  の真偽を答えよ。

- (4) 9 と 11 のうち, どちらか一方の数で割り切れるけれども, 他方の数では割り切れないような  $a_n$  だけを取り出し, 残りはすべて取り去る。こうして得られる  $a_n$  の部分列を小さい順に並べると, 23 番目の項は元の数列では第  $k$  項になるという。番号  $k$  を求めよ。