23 B

数　　学

［注意事項］

1. 監督者の指示があるまで，この問題冊子を開かないこと。
2. 問 Ⅰ，Ⅱ の解答はマークシートにマークし，問 Ⅲ の解答は専用の解答用紙に書くこと。
3. マークシート解答用紙は，コンピュータで処理するので，折り曲げたり汚したりしないこと。
4. マークシートに，氏名・受験番号を記入し，受験番号をマークする。マークがない場合や誤って記入した場合の答案は無効となる。また，問 Ⅲ の解答用紙にも受験番号・氏名を記入する。無記入の場合や受験番号を誤記入した場合はその答案は無効になる。

受験番号のマーク例（13015の場合）

受験番号				
1	3	0	1	5
万位	千位	百位	十位	一位
⓪	⓪	●	⓪	⓪
●	①	①	●	①
②	②	②	②	②
③	●	③	③	③
④	④	④	④	④
⑤	⑤	⑤	⑤	●
⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

5. 問 Ⅰ，Ⅱ において，マークするときは，HBまたはBの黒鉛筆を用いること。誤ってマークした場合には，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえで，新たにマークし直すこと。
6. マークで解答する場合は，下記の例に従い，正しくマークすること。

正しいマーク例

① ② ● ④ ⑤ ⑥

誤ったマーク例

① ② ③ ④ ⑤ ⑥	○をする
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	Vをする
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	完全にマークしない
① ② ③ ④ ⑤ ⑥	枠からはみだす

7. マークで解答する場合，$\boxed{}$ の中の文字は，それぞれ符号（－）または，数字1文字が対応している。ただし，符号は選択肢に含まれない場合がある。例えば，$\boxed{アイ}$ の形の場合，－9から－1の整数または10から99の整数が入り得る。

例　－2の場合

ア	●	⓪ ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ		⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

32の場合

ア	⊖	⓪ ① ② ● ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨
イ		⓪ ① ● ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

I $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，それぞれの問題で同じ記号の $\boxed{}$ には同一の値がはいる。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{ア} & \boxed{イ} \\ \boxed{ウ} & \boxed{エ} \\ \boxed{オ} & \boxed{カ} \end{pmatrix}$ となる。

2 次の正方行列 A に対し $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -7 & -23 \\ -13 & -33 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$ が成り立つとき

$A = \begin{pmatrix} \boxed{キ} & \boxed{クケ} \\ \boxed{コサ} & \boxed{シ} \end{pmatrix}$ となる。

(2) 極座標で表現された図形 $r=f(\theta)$ と原点から始まる二つの半直線 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ で囲まれる部分の面積は $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}\{f(\theta)\}^2\,d\theta$ で表すことができる。たとえば，$r=4\cos\theta$ で表される図形の面積は $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 8\cos^2\theta\,d\theta=\boxed{\text{ア}}\,\pi$ となる。

正葉形 $r=\sin 3\theta$ において $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ で $r\geqq 0$ となる θ の範囲を順に示すと

$$0\leqq\theta\leqq\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\pi,\quad \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi\leqq\theta\leqq\pi,$$

$\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\pi\leqq\theta\leqq\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ である。この正葉形で囲まれる面積は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\pi$ となる。

(3) 次の漸化式で定義される数列について考える。

$$a_{n+1}=\alpha a_n,\quad (b_{n+1}-a_n)=\beta(b_n-a_n)$$

数列$\{b_n\}$の無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は$-1<\alpha<1$かつ$-1<\beta<1$では収束する。

$a_1=1$, $b_1=-1$のとき

$\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\beta=-\dfrac{1}{2}$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり

$\alpha=\dfrac{1}{3}$ $\beta=\dfrac{1}{3}$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) $\cos\left(2\cdot\dfrac{\pi}{5}\right)=-\cos\left(3\cdot\dfrac{\pi}{5}\right)$に注意すると，

$\cos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}+\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$となる。次に，1辺の長さが1である正五角形ABCDEについて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$とおく。このとき，

$|\vec{d}\,|=\dfrac{\boxed{\text{エ}}+\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\vec{b}\cdot\vec{d}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$，

$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}-\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{b}+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}-\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}\vec{d}$となる。

(5) 「A」と書かれたカードが 5 枚，「B」と書かれたカードが 3 枚ある。「A」のカードを，区別できる 3 つの箱に分ける方法は $\boxed{\text{アイ}}$ 通りある。区別できない 3 つの箱に分ける方法は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある。「A」と「B」のカードの合計 8 枚を，区別できる 3 つの箱に分ける方法は $\boxed{\text{エオカ}}$ 通りあり，区別できない 3 つの箱に分ける方法は $\boxed{\text{キク}}$ 通りある。ただし，いずれの場合も空の箱があってもよいとする。

II $\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし，それぞれの問題で同じ記号の $\boxed{}$ には同一の値がはいる。

楕円 C：$7x^2 - 6xy + 12y^2 = 4$ と $x + y = 0$ に平行な直線とが 2 つの交点を持つときその中点は $x - \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}y = 0$ 上にある。

$s = x + y$ と $t = x - \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}y$ を用いると

この楕円は C'：$s^2 + \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}t^2 = \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ と s，t によって表せる。

この結果を利用して C の $|x + y| \leqq 1$ の部分の面積 S を求めてみる。求める部分は $|s| \leqq 1$ の部分になる。t を s で表したとき $|s| \leqq 1$ の部分の積分は $\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{\boxed{キ}\left(\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}} - s^2\right)}\,ds$ となり，これを計算すると $\dfrac{\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}}{\boxed{シ}}\pi + \boxed{ス}$ となる。$0 \leqq s \leqq 1$ かつ $0 \leqq t \leqq 1$ の面積が $\dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$ であり，求める部分の面積 S は積分結果にこの面積をかければ求まるので，求める部分の面積 S は

$\dfrac{\boxed{タ}\sqrt{\boxed{チ}}}{\boxed{ツテ}}\pi + \dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$ であることがわかる。また，元の楕円 C の面積は $\dfrac{\boxed{ニ}\sqrt{\boxed{ヌ}}}{\boxed{ネノ}}\pi$ である。

III 次の問いに答えよ。

(1) 剰余の定理を記せ。

(2) 剰余の定理を証明せよ。

(3) 整式$f(x)$について剰余の定理を使い次のことが成立することを示せ。

整式$f(x)$においてaが方程式$f(x)=0$の解であるならば
$f(x)$は$x-a$で割り切れる。

(4) 整式$f(x)$において$f(a)=f'(a)=0$ならば$f(x)$は$(x-a)^2$で割り切れることを示せ。