2011 年 度 入 学 試 験 問 題

数　　学（問　題）

注　意

1)　数学の問題冊子は4ページあり，問題は4題である。白紙・空白の部分は計算・下書きに使用してよい。

2)　別に解答用紙1枚があり，解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。指定欄以外への記入はすべて無効である。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。また，※印の欄には何も記入してはならない。**

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I (1)〜(6)の $\boxed{}$ 中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1) 次の式を計算せよ。

$\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{363}=$ $\boxed{\text{ア}}$　　$\log_{10}12\times\log_2 10-\log_4 9=$ $\boxed{\text{イ}}$

(2) 次の極限値を求めよ。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=$ $\boxed{\text{ウ}}$　　$\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2}=$ $\boxed{\text{エ}}$

(3) 不等式 $x^2+3x-4\leqq 0$ の解は $\boxed{\text{オ}}$ であり，不等式 $|x-1|\geqq\dfrac{1}{2}x+3$ の解は $\boxed{\text{カ}}$ である。ただし，記号 $|a|$ は実数 a の絶対値を表す。

(4) 公差が正の等差数列 $\{a_n\}$ の最初の 3 項 a_1, a_2, a_3 は，ある直角三角形の 3 辺の長さになっている。このとき，$\dfrac{a_2}{a_1}=$ $\boxed{\text{キ}}$ であり，第 n 項 a_n について $\dfrac{a_n}{a_1}=$ $\boxed{\text{ク}}$ が成り立つ。

(5) k は実数とする。関数 $f(x)=(x^2+kx+k+2)e^x$ の第2次導関数は $f''(x)=$ $\boxed{\text{ケ}}$ であり，曲線 $y=f(x)$ が変曲点をもつような k の値の範囲は $\boxed{\text{コ}}$ である。

(6) 数直線上に人がいて，サイコロを投げて出た目が 4 以下のときは数直線上を正の向きに 1 進み，出た目が 5 または 6 のときはそのままの位置に留まる。1 回サイコロを投げた際正の向きに 1 進む確率は $\boxed{\text{サ}}$ である。最初にこの人が原点 O(0) にいるとし，3 回サイコロを投げた後の位置の座標を X とすると，$X=r$ である確率は $\boxed{\text{シ}}$ ，X の期待値は $\boxed{\text{ス}}$ となる。ただし，r は $0\leqq r\leqq 3$ を満たす整数とする。

Ⅱ　$a>0$，$b>0$，$c>0$とする。O$(0,\ 0,\ 0)$を原点とする座標空間に4点A$(a,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ b,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ c)$，D$(a,\ b,\ c)$をとり，そのうちの3点A，B，Cが定める平面をαとする。このとき，平面α上の点Pの位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は，2つの実数$s$，$t$によって$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$と表せる。

(問 1)　直線ODが平面αと交わる点をUとする。点Uの座標を求めよ。

(問 2)　原点Oから平面αに下ろした垂線の足をVとする。点Vの座標を求めよ。

(問 3)　点Uと点Vとが一致するのは，a，b，cの間にどういう関係が成立するときか答えよ。

Ⅲ　区間$0 \leqq x \leqq 2$において定義された関数$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$を考える。以下，$0<a<2$とする。

(問 1)　$f(x)$の最大値を求めよ。

(問 2)　定積分$F(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$を求めよ。

(問 3)　(問 2)の$F(a)$に対して，座標平面上の点P$(a,\ 0)$，Q$(a,\ f(a))$，および原点Oを頂点とする△OPQの面積が$\dfrac{5}{14}F(a)$に等しいとする。

(i)　このとき成立する関係式を，$b=\sqrt{4-a^2}$で定義されるbの式として表せ。

(ii)　aの値を求めよ。

Ⅳ　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とし，O(0，0)を原点とする座標平面上で，行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} & -\dfrac{\sin 2\theta}{2} \\ \dfrac{\sin 2\theta}{2} & \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} \end{pmatrix}$$

が表す1次変換を f とする。添字 n は値1，2，3，…… をとるものとし，点 $P_1(1,\ 0)$ を考える。そして，f によって，点 P_1 が点 P_2 に移され，点 P_2 が点 P_3 に移される，というようにして順次点 P_n を定める。すなわち，任意の n に対して，f による点 P_n の像を点 P_{n+1} とする。

(問 1)　原点Oと異なる点 $A(x,\ y)$ が，f によって点Bに移されるとする。このとき，△OABの辺の長さに関して $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}}$ および $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}}$ を求めよ。

(問 2)　$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ と $\triangle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ は相似であることを示し，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さを求めよ。

(問 3)　$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。無限級数

$$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$$

の和を求め，その和が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ に等しいときの θ の値を求めよ。