平成２３年２月２５日

平成２３年度 三重大学個別学力検査

問　題　訂　正

９時３０分開始［ 前期日程　数学②］

科目：数学②

問題訂正（1個所）

2ページ　$\boxed{4}$　(2)

（誤）閉区間 $\left[0, \underline{\frac{\pi}{2}}\right]$ における…

（正）閉区間 $\left[0, \underline{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\right]$ における…

平成 23 年度学力検査問題

医学部・前期日程

数　　学

② (数学Ⅰ, 数学Ⅱ, 数学Ⅲ, 数学A, 数学B, 数学C)

問　　題	1 ページ ～ 2 ページ
解答用紙枚数	2　枚
解答時間	2時間

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 本冊子のページ数は上記のとおりである。 落丁，乱丁，印刷不鮮明の箇所などがある場合は申し出ること。
3. 解答用紙２枚の指定された欄２箇所(計４箇所)に，忘れずに本学の**受験番号**を記入すること。
4. 解答は，すべて**別紙解答用紙のそれぞれの解答欄**に記入すること。
5. 配布された問題冊子は，試験終了後持ち帰ること。
6. この問題冊子の空白部は，草稿用紙として使用してよい。

1 次のふたつの方程式を考える。

$$x^2+y^2=z^2 \qquad \cdots ①$$
$$s^2+t^2=u^2+1 \cdots ②$$

(1) 実数 a, b に対し実数 a^*, b^* を $a^*=a+b,\ b^*=2a+b+1$ で定める。$(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が①の解ならば $(s,\ t,\ u)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は②の解であることを示せ。また，逆に $(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が②の解ならば $(x,\ y,\ z)=(a^*,\ a^*+1,\ b^*)$ は①の解であることを示せ。

(2) 方程式①の自然数解 $(x,\ y,\ z)$ をピタゴラス数という。$y=x+1$ を満たすピタゴラス数を 3 組あげよ。

2 c を定数として数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=c+1, \quad a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+1 \ \ (n=1,2,3,\cdots)$$

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。また一般項 a_n の形を推定し，その推定が正しいことを証明せよ。

(2) $c=324$ のとき，a_n の値が自然数となるような n をすべて求めよ。

3 t を実数として2次正方行列 $A_t = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$ を考える。

(1) すべての実数 t に対し A_t が逆行列を持つことを示し，その逆行列 ${A_t}^{-1}$ を求めよ。

(2) 各実数 t に対し座標平面上の点 (x_t, y_t) を条件 $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = {A_t}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ によって定める。t がすべての実数を動くとき (x_t, y_t) が描く図形を求めて図示せよ。

4 関数 $f(x) = -\dfrac{1}{2x} + \tan x$, $g(x) = x\cos(x^2)$ について以下の問いに答えよ。

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある α で $f(\alpha) = 0$ となるものがただひとつ存在することを示せ。

(2) 閉区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ における $g(x)$ の増減表を書け。必要ならば(1)の α を用いてよい。

(3) $0 < \beta < \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ の範囲にあり $g'(\beta) = 0$ を満たす β を(1)の α を用いて表せ。また $g(x) = x\cos(x^2)$ $(0 \leqq x \leqq \beta)$ の逆関数を $h(x)$ とする。このとき $y = g(x)$ のグラフと $y = h(x)$ のグラフの関係に注意して，定積分 $\displaystyle\int_0^{g(\beta)} h(x)\,dx$ を α を用いて表せ。